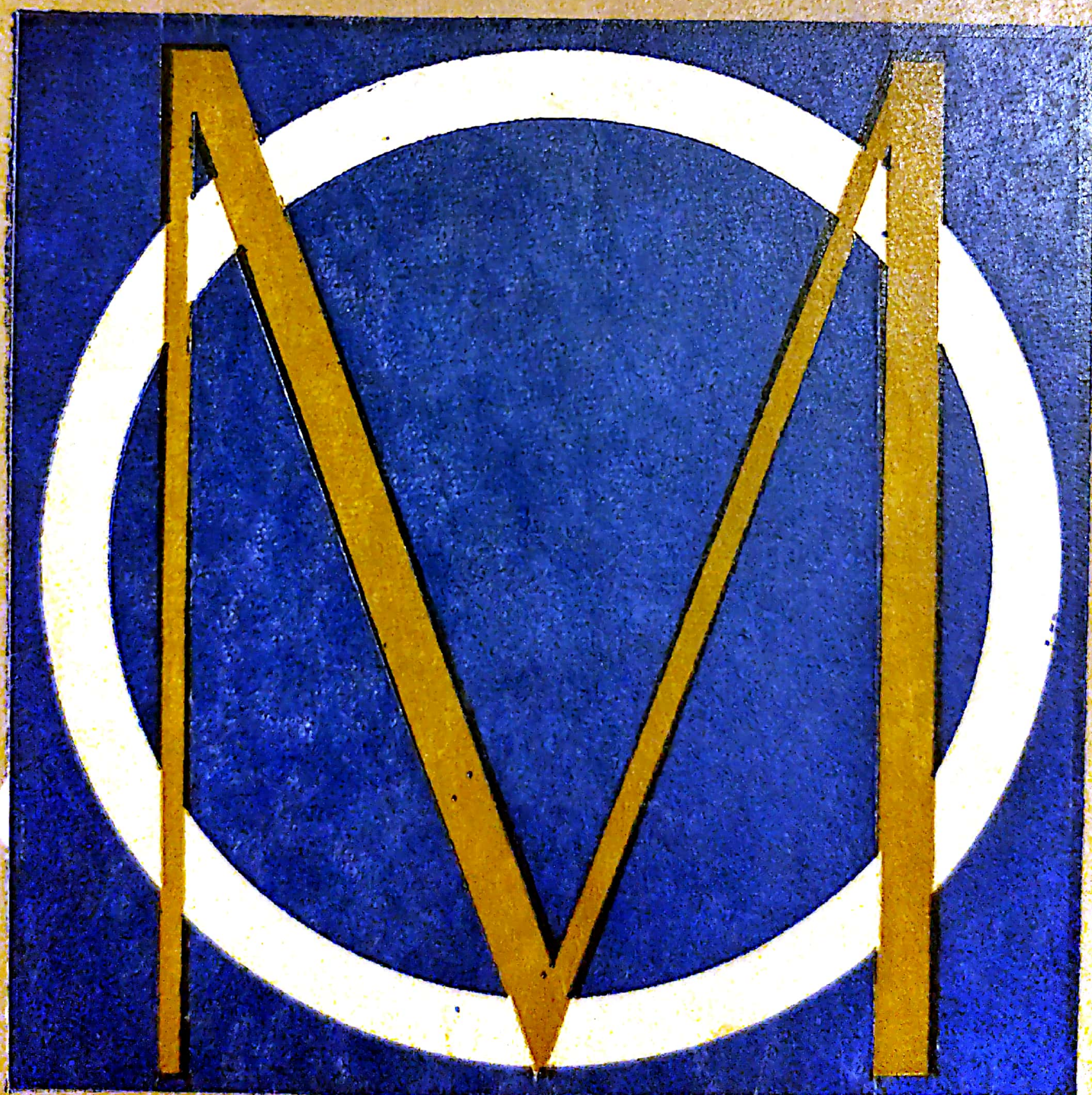
E. A. MOROZOVA   I. S. PETRAKOV   V. A. SKVORȚOV

OLIMPIADELE INTERNAȚIONALE DE MATEMATICĂ

probleme, rezolvări, punctaj



E. A. MOROZOVA, I. S. PETRAKOV, V. A. SKVORŢOV

OLIMPIADELE INTERNAŢIONALE DE MATEMATICĂ

Probleme, rezolvări, punctaj

Traducere din limba rusă, revizuită şi completată de
prof. Corneliu Vlădoreanu



EDITURA TEHNICĂ
BUCUREŞTI — 1978

Începînd cu anul 1959, din inițiativa R. S. România, se organizează anual concursurile și olimpiadele internaționale de matematică.

Lucrarea „Olimpiadele internaționale de matematică" conține problemele date la cele 20 olimpiade, cu rezolvările detaliate, problemele propuse de Juriile internaționale care nu au fost date la olimpiade, precum și unele probleme de la finalele olimpiadelor naționale din unele țări participante. Toate problemele sînt rezolvate.

Cartea este adresată elevilor din ultimii ani de liceu, cadrelor didactice din învățămîntul liceal și tuturor celor care se ocupă cu organizarea concursurilor și olimpiadelor de matematică.

Е. А. МОРОЗОВА, И. С. ПЕТРАКОВ, В. А. СКВОРЦОВ

Международные математические олимпиады.
Задачи, решения, итоги.

CUVÎNT ÎNAINTE

An de an crește numărul țărilor care participă la olimpiadele internaționale de matematică ale elevilor. La cea de-a XIX-a olimpiadă în anul 1977 au participat 21 țări ale Europei, Asiei și Americii.

Această carte, scrisă de conducătorii delegației sovietice la olimpiadele internaționale de matematică, pune la îndemîna cititorilor materialele primelor nouăsprezece olimpiade internaționale de matematică. Majoritatea conținutului cărții este formată din problemele date la aceste olimpiade, însoțite de rezolvările amănunțite ale acestora. Au fost de asemenea cuprinse în carte unele probleme avute în vedere de Juriul internațional, însă din un motiv sau altul nu au fost date la olimpiade. Aceste probleme, propuse de diferite țări, reflectă într-un anumit grad nivelul olimpiadelor naționale din aceste țări. Se expun și unele probleme care au constituit subiectul etapelor finale ale olimpiadelor naționale din țări participante la olimpiadele internaționale.

Cartea se adresează în principal elevilor din clasele superioare, care au preocupări matematice și doresc să rezolve probleme grele. Bineînțeles că aceste probleme sînt mai dificile decît cele care se dau la diferitele olimpiade locale. Aceasta înseamnă însă că pentru rezolvarea lor trebuie depusă mai multă insistență, ca și un timp mai îndelungat. Se înțelege de la sine că rezolvarea din a doua parte a cărții trebuie citită numai după ce problema a fost rezolvată independent, sau, în orice caz, după un număr suficient de mare de încercări.

Cartea este, de asemenea, folositoare profesorilor care conduc cercuri de matematică sau organizează diferite concursuri.

În această ediție sînt adăugate noi probleme din materialele juriului internațional și din diferitele olimpiade naționale. Aceste probleme au fost puse cu multă amabilitate la dispoziția autorilor de conducătorii delegațiilor țărilor respective, pentru care li se exprimă întreaga mulțumire, îndeosebi profesorului A. Matveev (Bulgaria), R. Leiness și R. Reynold (Marea Britanie), doctorului E. Hoggy și I. Raimond

(Ungaria), profesorului W. Engel şi doctorului H. Bausch (R.D.G.), docentului G. Gundji (Mongolia), profesorului Freudenthal (Olanda), profesorului Cijikovskii şi docentului Monkovskii (Polonia), profesorului T. Roman (România), profesorului Greitzer (S.U.A.), docenţilor Vischin şi Moravcic (Cehoslovacia), profesorului Ilici-Daiovici şi doctorului Mitici (Iugoslavia).

Autorii păstrează vie în memorie colaborarea în cadrul juriului cu profesorii C. Ionescu-Bujor, şi Rudolf Zelinka, organizatori ai primelor olimpiade. Se aduc mulţumiri lui N. B. Vasiliev pentru materialele celei de a IV-a Olimpiade din R.S.F.S.R., lui A. L. Toom şi N. N. Cenţov pentru sfaturi şi observaţii.

AUTORII

1

OLIMPIADELE INTERNAŢIONALE DE MATEMATICĂ

Începînd cu anul 1959, în fiecare an se desfăşoară olimpiadele internaţionale de matematică ale elevilor. Aceste olimpiade şi-au cucerit destul de repede o mare autoritate internaţională, iar numărul ţărilor participante este în continuă creştere.

Prima Olimpiadă internaţională de matematică s-a ţinut în anul 1959 în România, din iniţiativa Societăţii de matematică şi fizică şi a Ministerului Învăţămîntului din această ţară. La primele olimpiade au participat numai ţările socialiste . La cea de-a XIX-a olimpiadă din anul 1977 au fost reprezentaţi elevii din 21 ţări: Algeria, Anglia, Austria, Belgia, Bulgaria, Cehoslovacia, Cuba, Finlanda, Franţa, R.D.G., R.F.G., Italia, Iugoslavia, Mongolia, Olanda, Polonia, România, Ungaria, U.R.S,S., Suedia şi S.U.A..

Pentru multe ţări, olimpiadele internaţionale sînt o continuare directă şi o desăvîrşire a unei munci susţinute în organizarea olimpiadelor matematice interne la diferite nivele. În unele ţări (Finlanda, Austria) olimpiadele naţionale au luat naştere în legătură cu faptul că aceste ţări au devenit participante la olimpiadele internaţionale. În alte ţări desfăşurarea olimpiadelor matematice naţionale şi a diferitelor concursuri de rezolvări de probleme au o tradiţie destul de îndelungată. Astfel, încă din anul 1894 în România se ţineau concursuri de rezolvări de probleme, iar în Ungaria se ţineau olimpiade de matematică ale elevilor. În Rusia au avut loc concursuri de matematică din anul 1886, iar în forma lor contemporană în U.R.S.S. de la prima olimpiadă de la Leningrad din anul 1934 şi prima olimpiadă de la Moscova din anul 1935.

Echipa fiecărei țări este compusă din cîte opt participanți, conducătorul delegației și adjunctul său. Conducătorii echipelor formează juriul internațional.

Olimpiadele se desfășoară în diferite țări. Cu toate că nu a fost adoptat nici un regulament oficial sau statut al olimpiadelor, s-au statornicit de-a lungul anilor anumite tradiții, care sînt respectate de toate țările organizatoare. Olimpiadele se țin vara, în prima jumătate a lunii iulie. În țara organizatoare ia ființă un comitet de organizare, care se ocupă de întreaga pregătire și desfășurare a lucrărilor olimpiadei. Toate țările participante trimit pe adresa comitetului de organizare cîteva probleme, dintre care o comisie specială alege pe cele considerate mai potrivite și le propune în final spre examinare juriului internațional. În timp de două-trei zile juriul definitivează lista problemelor pentru olimpiadă (care conține de obicei șase probleme) și punctajul maxim pentru rezolvarea fiecărei probleme propuse. Se redactează apoi și se aprobă textul problemelor în cele patru limbi de lucru ale juriului: engleză, franceză, germană și rusă. În continuare problemele sînt traduse în limbile participanților și se pregătește setul de probleme destinat fiecărui participant.

Concursul se desfășoară de-a lungul a două zile, în fiecare din acestea propunîndu-se participanților rezolvarea a trei probleme în timp de patru ore. A fost adoptată procedura de desfășurare a concursului propriu-zis. Fiecare concurent primește un număr de ordine de la 1 la 8, iar în timpul concursului, în aceeași sală, se găsesc concurenții care au numere identice, adică cîte unul din fiecare echipă.

În acest timp juriul își continuă activitatea, stabilind criteriile de apreciere a diferitelor probleme, iar după încheierea primei zile de concurs începe verificarea lucrărilor. Verificarea preliminară a acestora este făcută mai întîi de conducătorii delegațiilor împreună cu adjuncții lor. Apoi, pentru a aprecia unitar rezolvările toate lucrările sînt verificate de coordonatori de problemă. Coordonatorii sînt matematicieni ai țării organizatoare și participă de regulă la ședințele juriului cu drept de vot consultativ.

Rezultatele finale ale olimpiadei se stabilesc în plenul juriului, stabilindu-se atribuirea primelor trei premii, ca și a premiilor speciale pentru rezolvări originale și deosebit de frumoase ale problemelor.

Prin tradiție, olimpiadele internaționale stabilesc clasamentul numai pentru participanți, individual. Totdeauna prezintă însă un mare interes rezultatele neoficiale ale echipelor, exprimate prin suma punctelor acumulate de delegațiile diferitelor țări.

PUNCTAJUL OBŢINUT DE ECHIPELE PARTICIPANTE LA OLIMPIADE

Ţara	Numărul olimpiadei																			
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI	XVII	XVIII	XIX	XX
Algeria	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	17	
Anglia	—	—	—	—	—	—	—	—	231	263	193	180	110	179	164	188	241	214	190	201
Austria												104	82	136	144	212	192	167	151	174
Belgia	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	57	—	—	—	—	—	—	—	33	—
Bulgaria	132	175	108	196	145	198	93	238	159	206	189	145	39	120	96	171	186	174	172	182
Cehoslovacia	192	257	159	212	151	194	159	215	159	248	170	145	55	130	149	158	162	116	161	195
Cuba	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	9	14	42	65	—	16	41	136
Finlanda	—	—	—	—	—	—	62	—	—	—	—	—	—	—	86	111	—	52	88	118
Franţa	—	—	—	—	—	—	—	—	41	—	119	141	38	—	153	194	176	165	127	179
R.D.G.	40	38	146	153	140	196	175	280	257	304	240	221	142	239	188	236	249	142	163	—
R.F.G.	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	165	184
Grecia	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	95	50	—	—
Italia	—	—	—	—	—	—	—	—	110	132	—	—	—	—	—	—	—	—	22	—
Iugoslavia	—	—	—	—	165	155	137	224	136	179	181	209	71	136	137	216	163	116	159	171
Mongolia	—	—	—	—	—	169	63	88	87	74	120	78	26	49	65	60	75	—	49	61
Olanda	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	51	87	48	51	96	112	67	78	185	157
Polonia	122	—	203	212	134	209	178	269	101	260	119	105	118	160	174	138	124	138	157	156
România	249	248	197	257	191	213	222	257	214	208	219	208	110	206	141	199	180	118	122	237
S.U.A.	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	243	247	188	202	225
Suedia	—	—	—	—	—	—	—	—	135	256	104	110	43	60	99	187	160	120	137	117
Turcia	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	60	—
Ungaria	233	248	270	289	234	253	244	281	251	291	247	233	255	263	215	237	258	160	190	—
U.R.S.S.	111	—	—	263	271	269	281	293	275	298	231	221	205	270	254	256	246	250	192	—
Vietnam	40	38	146	153	140	196	175	280	257	304	240	221	142	239	188	236	175	112	22	—

Olimpiadele internaţionale sînt o formă importantă de colaborare în domeniul educaţiei, permiţînd nu numai să se compare nivelul culturii matematice din diferite ţări, dar şi facilitînd schimbul de experienţă în domeniul muncii extraşcolare cu elevii, în particular cel al experienţei privind organizarea olimpiadelor naţionale.

Pentru elevii participanţi la olimpiadă aceste întîlniri internaţionale sînt folositoare şi prin aceea că le dă posibilitatea de a se cunoaşte şi a se împrieteni cu tineri din alte ţări care au acelaşi interes pentru ştiinţă, aceeaşi pasiune pentru matematică. Participanţii au de asemenea largi posibilităţi de a cunoaşte ţara în care are loc olimpiada. De obicei, comitetul de organizare dă concurenţilor posibilitatea a numeroase excursii pe cele mai interesante itinerarii, întîlniri cu tineretul ţării gazdă, participări la concursuri sportive, activităţi care sprijină întărirea prieteniei între reprezentanţi ai tineretului din ţări diferite.

Pentru mulţi tineri matematicieni participarea la olimpiadă a fost numai primul pas spre ştiinţă. Marea lor majoritate au intrat după absolvirea şcolii în facultăţile de matematică ale universităţilor. Participanţii la primele olimpiade au devenit deja matematicieni profesionişti. Participanţilor la olimpiadă, pe lîngă capacitate matematică, li se cer calităţi pur sportive, puterea de a-şi concentra eforturile asupra problemelor, într-un interval de timp limitat, în care nu-şi pot etala întru totul posibilităţile reale de creaţie. Totuşi, aceste calităţi sportive îi sînt necesare şi omului de ştiinţă. De aceea, nu trebuie considerat ca întîmplător faptul că mulţi foşti învingători la olimpiadele internaţionale de matematică au devenit matematicieni de valoare şi lucrează astăzi intens cu elevi, transmiţînd dragostea lor faţă de ştiinţă noii generaţii de tineri matematicieni.

Prima Olimpiadă internațională de matematică

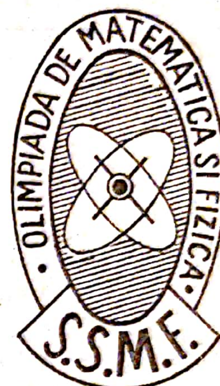
Prima Olimpiadă internațională de matematică s-a desfășurat între 23 iulie și 31 iulie 1959 în România, în orașele Brașov și București.

Premiul întîi a fost obținut de către elevii:

Basarab Nicolescu — România,
Bohuslav Diviš — Cehoslovacia,
Csonok György — Ungaria.

Pe echipe s-au obținut următoarele rezultate:

Țara	Premii I (37–40 puncte)	Premii II (36 puncte)	Premii III (34–35 puncte)	Evidențieri (25–33 puncte)
Bulgaria	—	—	—	1
Cehoslovacia	1	—	—	—
R.D.G.	—	—	—	—
Polonia	—	—	—	1
România	1	2	2	1
Ungaria	1	1	2	1
U.R.S.S.	—	—	1	2



A doua Olimpiadă internațională de matematică

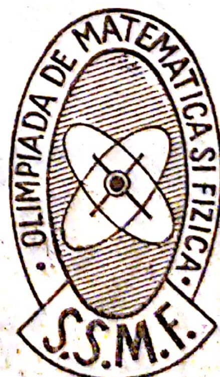
A doua Olimpiadă internațională de matematică s-a desfășurat între 18 iulie și 25 iulie 1960 în România, în orașele Sinaia și București.

Premiul întîi a fost obținut de către elevii:

Cezar Gheorghe — România,
Ivan Korec — Cehoslovacia,
Bella Barabas — Ungaria,
Ferenc Mezei — Ungaria.

Pe echipe s-au obținut următoarele rezultate:

Țara	Premii I (peste 40 puncte)	Premii II (37–40 puncte)	Premii III (33–36 puncte)	Evidențieri (29–32 puncte)
Bulgaria	—	—	1	2
Cehoslovacia	1	1	2	2
R.D.G.	—	—	—	1
România	1	1	1	1
Ungaria	2	2	—	1



A treia Olimpiadă internațională de matematică

A treia Olimpiadă internațională de matematică s-a desfășurat între 6 iulie și 16 iulie 1961 în Ungaria, în orașele Veszprém și Budapesta.

Premiul întîi a fost obținut de către elevii:

Bella Barabas	(40 puncte) —	Ungaria,
Maciej Skworcziński	(39 puncte) —	Polonia,
Jozsef Kota	(37 puncte) —	Ungaria.

Pe echipe s-au obținut următoarele rezultate:

Țara	Premii		
	I (37–40 puncte)	II (34–36 puncte)	III (30–33 puncte)
Bulgaria	—	—	—
Cehoslovacia	—	—	1
R.D.G.	—	—	1
Polonia	1	—	—
România	—	1	1
Ungaria	2	3	1

A patra Olimpiadă internațională de matematică

A patra Olimpiadă internațională de matematică s-a desfășurat între 5 iulie și 15 iulie 1962 în Cehoslovacia, în orașele České Budejovice și Praga.

Premiul întîi a fost obținut de către elevii:

Iosif Bernstein	(46 puncte) —	U.R.S.S.,
Gerö Herzsen	(45 puncte) —	Ungaria,
Lidia Goncearova	(42 puncte) —	U.R.S.S.,
Sebestyen Zoltan	(41 puncte) —	Ungaria.

Pe echipe s-au obținut următoarele rezultate:

Țara	Premii		
	I (41–46 puncte)	II (34–40 puncte)	III (29–33 puncte)
Bulgaria	—	1	2
Cehoslovacia	—	1	3
R.D.G.	—	1	—
Polonia	—	1	3
România	—	3	3
Ungaria	2	3	2
U.R.S.S.	2	2	2



Numărul problemei *	Punctajul maxim	Numărul de concurenţi avînd acelaşi punctaj								
		8	7	6	5	4	3	2	1	0
20	6	—	—	45	5	2	0	1	2	1
21	6	—	—	21	11	7	9	4	2	2
22	8	14	8	6	6	8	4	2	2	6
23	5	—	—	—	34	10	3	5	2	2
24	7	—	12	12	5	6	1	2	4	14
25	6	—	—	9	8	16	4	3	3	13
26	8	2	2	5	7	1	0	6	8	25

A cincea Olimpiadă internaţională de matematică

A cincea Olimpiadă internaţională de matematică s-a desfăşurat între 5 iulie şi 13 iulie 1963 în Polonia în oraşele Wroclaw şi Varşovia.

Premiul întîi a fost obţinut de către elevii:

Franz Dazar (39 puncte) — Iugoslavia,
Ghennadii Maloletkin (39 puncte) — U.R.S.S.,
Rafael Sarkisian (39 puncte) — U.R.S.S.,
Alexei Tolpîgo (38 puncte) — U.R.S.S.,
Laszlo Zsido (37 puncte) — România,
Josef Danes (35 puncte) — Cehoslovacia,
Anatolii Zaiţev (35 puncte) — U.R.S.S.

Pe echipe s-au obţinut următoarele rezultate:

Ţara	Premii		
	I (35–40 puncte)	II (28–34 puncte)	III (21–27 puncte)
Bulgaria	—	—	3
Cehoslovacia	1	—	1
R.D.G.	—	—	3
Iugoslavia	1	2	1
Polonia	—	—	2
România	1	1	3
Ungaria	—	5	3
U.R.S.S.	4	3	1

* În acest tabel, şi în continuare, numărul prin care se indică o problemă este cel pe care problema îl are în prezenta carte.

Numărul problemei	Punctajul maxim	Numărul de concurenți avînd același punctaj								
		8	7	6	5	4	3	2	1	0
27	6	—	—	15	13	12	11	7	3	3
28	7	—	7	11	15	13	5	4	6	3
29	7	—	16	5	6	4	4	3	5	21
30	6	—	—	6	4	6	5	12	15	16
31	6	—	—	21	11	2	1	2	4	23
32	8	21	15	8	1	8	3	1	1	6

A șasea Olimpiadă internațională de matematică

A șasea Olimpiadă internațională de matematică s-a desfășurat între 30 iunie și 10 iulie 1964 în U.R.S.S. în orașul Moscova.

Premiul întîi a fost obținut de către elevii:

David Bernstein (42 puncte) — U.R.S.S.,
Laszlo Keringer (41 puncte) — Ungaria,
Ghennadii Arhipov (39 puncte) — U.R.S.S.,
Laszlo Lovasz (39 puncte) — Ungaria,
Jozsef Pelikan (39 puncte) — Ungaria,
Tadeusz Figel (39 puncte) — Polonia,
Iurii Matiasevici (38 puncte) — U.R.S.S.

Pe echipe s-au obținut următoarele rezultate:



Țara	Premii I (37–42 puncte)	Premii II (31–36 puncte)	Premii III (27–30 puncte)
Bulgaria	—	—	3
Cehoslovacia	—	2	2
R.D.G.	—	1	2
Iugoslavia	—	1	1
Mongolia	—	—	1
Polonia	1	1	3
România	—	2	3
Ungaria	3	1	1
U.R.S.S.	3	1	3

Numărul problemei	Punctajul maxim	Numărul de concurenți avînd același punctaj									
		9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
33	7	—	—	45	2	8	6	4	3	3	1
34	7	—	—	40	0	4	1	0	0	6	21
35	6	—	—	—	57	6	2	0	0	2	5
36	6	—	—	—	16	1	0	0	1	4	50
37	7	—	—	14	3	3	23	7	14	2	6
38	9	3	2	1	47	3	0	5	4	1	6

A șaptea Olimpiadă internațională de matematică

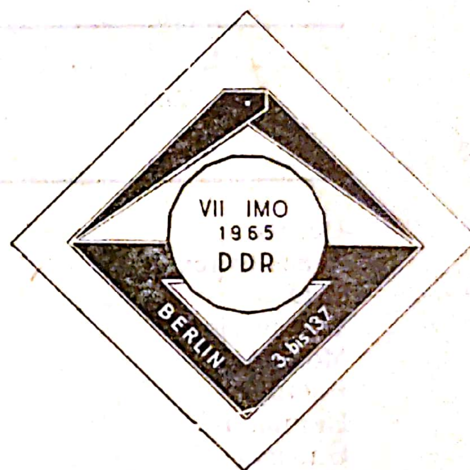
A șaptea Olimpiadă internațională de matematică s-a desfășurat între 3 iulie și 13 iulie 1965 în R.D.G., în orașele Berlin și Bogensee.

Premiul întîi a fost obținut de către elevii:

Pavel Bleher	(40 puncte)	— U.R.S.S.,
Laszlo Lovasz	(40 puncte)	— Ungaria,
Serghei Vallander	(39 puncte)	— U.R.S.S.,
Andrei Zubkov	(39 puncte)	— U.R.S.S.,
Endre Makai	(38 puncte)	— Ungaria,
Jozsef Pelikan	(38 puncte)	— Ungaria,
Anatolii Peresețki	(38 puncte)	— U.R.S.S.,
Nikolai Șirokov	(38 puncte)	— U.R.S.S.

Pe echipe s-au obținut următoarele rezultate:

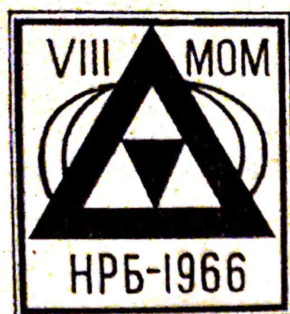
Țara	Premii I (38–40 puncte)	Premii II (30–37 puncte)	Premii III (20–29 puncte)
Bulgaria	—	—	1
Cehoslovacia	—	1	3
R.D.G.	—	2	3
Finlanda	—	—	—
Iugoslavia	—	—	2
Mongolia	—	—	—
Polonia	—	1	3
România	—	4	3
Ungaria	3	2	2
U.R.S.S.	5	2	—



Numărul problemei	Punctajul maxim	Numărul de concurenți avînd același punctaj: 9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
39	4	—	—	—	—	—	37	9	15	13	6
40	6	—	—	—	19	5	4	6	11	18	17
41	8	—	30	3	2	4	3	0	5	10	23
42	6	—	—	—	37	6	7	4	19	5	2
43	7	—	—	26	9	3	3	4	8	12	15
44	9	10	0	2	0	0	11	13	10	13	21

A opta Olimpiadă internațională de matematică

A opta Olimpiadă internațională de matematică s-a desfășurat între 3 iulie și 13 iulie 1966 în Bulgaria în orașul Sofia.



Premiul întîi a fost obţinut de către elevii:

Peter Enskonatus	(40 puncte)	— R.D.G.,
Walter Lippe	(40 puncte)	— R.D.G.,
Josef Richard	(40 puncte)	— R.D.G.,
Michal Miskurevicz	(40 puncte)	— Polonia,
Dan Voiculescu	(40 puncte)	— România,
Laszlo Lovasz	(40 puncte)	— Ungaria,
Jozsef Pelikan	(40 puncte)	— Ungaria,
Lajos Posa	(40 puncte)	— Ungaria,
Iuri Bogdanski	(40 puncte)	— U.R.S.S.,
Sabir-Husein-Zade	(40 puncte)	— U.R.S.S.,
Andrei Marcenko	(40 puncte)	— U.R.S.S.,
Grigorii Rosenblum	(39 puncte)	— U.R.S.S.,
Mihail Fokin	(39 puncte)	— U.R.S.S.

Pe echipe s-au obţinut următoarele rezultate:

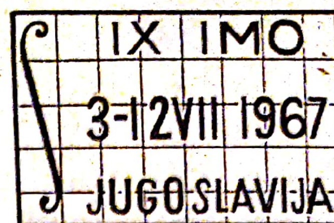
Ţara	Premii		
	I (39—40 puncte)	II (34—38 puncte)	III (31—33 puncte)
Bulgaria	—	1	3
Cehoslovacia	—	1	2
R.D.G.	3	3	—
Iugoslavia	—	2	1
Mongolia	—	—	—
Polonia	1	4	1
România	1	1	2
Ungaria	3	2	1
U.R.S.S.	5	1	1

Numărul problemei	Punctajul maxim	Numărul de concurenţi avînd acelaşi punctaj								
		8	7	6	5	4	3	2	1	0
45	6	—	—	50	2	4	3	0	3	10
46	7	—	48	5	1	2	0	2	2	12
47	7	—	20	4	6	5	7	5	5	20
48	5	—	—	—	68	3	0	0	0	1
49	7	—	33	3	2	7	5	7	5	10
50	8	51	6	2	1	6	3	1	1	1

A noua Olimpiadă internaţională de matematică

A noua Olimpiadă internaţională de matematică s-a desfăşurat între 2 iulie şi 13 iulie 1967 în Iugoslavia în oraşul Cetinje.

Premiul întîi a fost obţinut de către elevii :



Peter Gheorghiev (42 puncte) — Bulgaria,
Krizstof Bandt (42 puncte) — R.D.G.,
Stefan Heinrich (42 puncte) — R.D.G.,
Dan Voiculescu (42 puncte) — România,
Alexandr Lifşiţ (42 puncte) — U.R.S.S.,
Simon Norton (41 puncte) — Anglia,
Reinhardt Hoppner (39 puncte) — R.D.G.,
Victor Turcianinov (39 puncte) — U.R.S.S.,
György Elekeş (38 puncte) — Ungaria,
Laszlo Surany (38 puncte) — Ungaria,
Andrei Suslin (38 puncte) — U.R.S.S.

Pe echipe s-au obţinut următoarele rezultate :

Ţara	Premii		
	I (38–42 puncte)	II (30–37 puncte)	III (22–29 puncte)
Anglia	1	2	4
Bulgaria	1	—	1
Cehoslovacia	—	1	3
Franţa	—	—	—
R.D.G.	3	3	1
Italia	—	1	1
Iugoslavia	—	—	3
Mongolia	—	—	1
Polonia	—	—	1
România	1	1	4
Suedia	—	—	2
Ungaria	2	3	3
U.R.S.S.	3	3	2

Numărul problemei	Punctajul maxim	Numărul de concurenţi avînd acelaşi punctaj								
		8	7	6	5	4	3	2	1	0
51	6	—	—	31	8	10	16	7	10	12
52	7	—	27	5	16	8	7	6	5	20
53	8	28	0	2	0	4	6	6	3	45
54	6	—	—	43	11	10	16	7	1	12
55	7	—	23	4	7	9	6	8	20	22
56	8	29	5	11	7	6	11	7	5	18

A zecea Olimpiadă internaţională de matematică

A zecea Olimpiadă internaţională de matematică s-a desfăşurat între 5 iulie şi 18 iulie 1968 în U.R.S.S. în oraşele Moscova şi Leningrad.



Premiul întîi a fost obţinut de către elevii:

Tomas Masek	(40 puncte)	— Cehoslovacia,
Bogus Sivak	(40 puncte)	— Cehoslovacia,
Stefan Heinrich	(40 puncte)	— R.D.G.,
Jürgen Gärtner	(40 puncte)	— R.D.G.,
Krizstof Bandt	(40 puncte)	— R.D.G.,
Ulrich Zelle	(40 puncte)	— R.D.G.,
Edi Didak	(40 puncte)	— Polonia,
Rudolf Berceanu Barbu	(40 puncte)	— România,
Olaf Persen	(40 puncte)	— Suedia,
Laszlo Babai	(40 puncte)	— Ungaria,
János Pincz	(40 puncte)	— Ungaria,
Laszlo Györmasz	(40 puncte)	— Ungaria,
Mihail Bludze	(40 puncte)	— U.R.S.S.,
Pavel Kurceanov	(40 puncte)	— U.R.S.S.,
Vladimir Ponomarenko	(40 puncte)	— U.R.S.S.,
Serghei Sobolev	(40 puncte)	— U.R.S.S.,
Malcom Williamson	(39 puncte)	— Anglia,
Simon Norton	(39 puncte)	— Anglia,
William Porterfield	(39 puncte)	— Anglia,
Boleslaw Simanski	(39 puncte)	— Polonia,
Valerii Fedotov	(39 puncte)	— U.R.S.S.
Wolfgang Bogmeister	(39 puncte)	— R.D.G.

Pe echipe s-au obţinut următoarele rezultate:

Ţara	Premii		
	I (39–40 puncte)	II (33–38 puncte)	III (25–32 puncte)
Anglia	3	2	2
Bulgaria	—	3	1
Cehoslovacia	2	4	—
R.D.G.	5	3	—
Italia	—	—	1
Iugoslavia	—	—	3
Mongolia	—	—	—
Polonia	2	3	2
România	1	1	2
Suedia	1	2	5
Ungaria	3	3	2
U.R.S.S.	5	1	2

Numărul problemei	Punctajul maxim	Numărul de concurenţi avînd acelaşi punctaj								
		8	7	6	5	4	3	2	1	0
57	6	—	—	39	27	7	7	4	3	9
58	7	—	62	14	7	2	4	1	4	2
59	7	—	41	10	1	2	0	7	22	13
60	5	—	—	—	62	1	3	11	2	17
61	7	—	42	2	21	3	8	1	2	17
62	8	46	11	1	5	0	7	4	12	10

A unsprezecea Olimpiadă internaţională de matematică

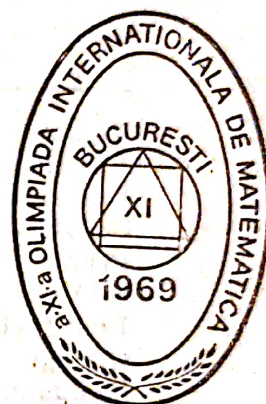
A unsprezecea Olimpiadă internaţională de matematică s-a desfăşurat între 5 iulie şi 20 iulie 1969 în România, patria olimpiadelor internaţionale, în oraşul Bucureşti.

Premiul întîi a fost obţinut de către elevii:

Simon Norton	(40 puncte)	— Anglia,
Tibor Fiala	(40 puncte)	— Ungaria,
Vladimir Drinfeld	(40 puncte)	— U.R.S.S.

Pe echipe s-au obţinut următoarele rezultate:

Ţara	Premii		
	I (40 puncte)	II (30—37 puncte)	III (24—29 puncte)
Anglia	1	1	1
Belgia	—	—	—
Bulgaria	—	—	3
Cehoslovacia	—	—	3
Franţa	—	1	—
R.D.G.	—	4	4
Iugoslavia	—	2	2
Olanda	—	—	—
Mongolia	—	—	1
Polonia	—	1	—
România	—	4	2
Suedia	—	—	—
Ungaria	1	4	2
U.R.S.S.	1	3	3



Numărul problemei	Punctajul maxim	Numărul de concurenţi avînd acelaşi punctaj								
		8	7	6	5	4	3	2	1	0
63	5	—	—	—	46	3	6	6	17	34
64	7	—	34	5	10	32	6	7	5	13
65	7	—	31	13	12	15	5	10	20	6
66	6	—	—	21	5	6	9	14	28	29
67	7	—	37	10	11	10	9	7	11	17
68	8	7	2	3	9	12	13	18	15	33

A douăsprezecea Olimpiadă internaţională de matematică

A douăsprezecea Olimpiadă internaţională de matematică s-a desfăşurat între 8 iulie şi 22 iulie 1970 în Ungaria în oraşele Keszthely şi Budapesta.



Premiul întîi a fost obţinut de către elevii:

Wolfgang Burgmeister (40 puncte) — R.D.G.,
Imre Ruzsa (40 puncte) — Ungaria,
Andreii Hodulev (40 puncte) — U.R.S.S.,
Bernard Silverman (39 puncte) — Anglia,
Erwin Baimoczi (39 puncte) — Ungaria,
Arkadii Klimov (39 puncte) — U.R.S.S.,
Istvan Koncz (37 puncte) — Ungaria.

Pe echipe s-au obţinut următoarele rezultate:

Ţara	Premii I (37–40 puncte)	Premii II (30–35 puncte)	Premii III (19–28 puncte)
Anglia	1	—	6
Austria	—	—	1
Bulgaria	—	—	3
Cehoslovacia	—	—	4
Franţa	—	1	4
R.D.G.	1	2	4
Iugoslavia	—	3	3
Olanda	—	—	1
Mongolia	—	—	1
Polonia	—	—	1
România	—	3	4
Suedia	—	—	2
Ungaria	3	1	3
U.R.S.S.	2	1	3

Numărul problemei	Punctajul maxim	Numărul de concurenţi avînd acelaşi punctaj: 8	7	6	5	4	3	2	1	0
69	5	—	—	—	61	2	0	4	19	26
70	7	—	52	27	8	6	6	2	4	7
71	8	6	3	2	3	1	7	2	4	84
72	6	—	—	43	25	22	6	4	6	6
73	6	—	—	42	3	4	8	11	8	36
74	8	14	5	3	10	3	3	9	7	58

A treisprezecea Olimpiadă internaţională de matematică

A treisprezecea Olimpiadă internaţională de matematică s-a desfăşurat între 10 iulie şi 21 iulie 1971 în Cehoslovacia în oraşele Bratislava şi Zilina.

Premiul întîi a fost obţinut de către elevii:



Imre Ruzsa	(42 puncte)	— Ungaria,
Ferenc Gondos	(39 puncte)	— Ungaria,
Wolfgang Burgmeister	(38 puncte)	— R.D.G.,
Stanislaw Sarek	(38 puncte)	— Polonia,
Peter Komiat	(38 puncte)	— Ungaria,
Peter Frankl	(37 puncte)	— Ungaria,
Serghei Gaşkov	(35 puncte)	— U.R.S.S.

Pe echipe s-au obţinut următoarele rezultate:

Ţara	Premii I (35–42 puncte)	Premii II (23–34 puncte)	Premii III (11–22 puncte)
Anglia	—	1	4
Austria	—	—	4
Bulgaria	—	—	—
Cehoslovacia	—	—	1
Cuba	—	—	—
Franţa	—	—	—
R.D.G.	1	1	4
Iugoslavia	—	—	2
Olanda	—	—	2
Mongolia	—	—	—
Polonia	1	—	4
România	—	1	4
Suedia	—	—	2
Ungaria	4	4	—
U.R.S.S.	1	5	2

Numărul problemei	Punctajul maxim	Numărul de concurenţi avînd acelaşi punctaj: 9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
75	5	—	—	—	—	19	10	21	31	26	8
76	7	—	—	12	8	4	6	5	8	15	57
77	9	18	0	1	0	0	0	2	4	11	79
78	6	—	—	—	9	18	14	11	10	16	37
79	7	—	—	25	3	0	1	3	2	15	66
80	8	—	12	0	1	2	4	1	3	20	72

A paisprezecea Olimpiadă internaţională de matematică

A paisprezecea Olimpiadă internaţională de matematică s-a desfăşurat între 5 iulie şi 17 iulie 1972 în Polonia în oraşele Varşovia şi Torun, oraşul natal al lui Copernic.

Premiul întîi a fost obţinut de către elevii:

Paul Kröger	(40 puncte)	— R.D.G.,
Andrejcic Gregos	(40 puncte)	— Polonia,
Mirko Martin	(40 puncte)	— România,
Komarnik Wilmos	(40 puncte)	— Ungaria,
Zsolt Tuzsa	(40 puncte)	— Ungaria,
Zoltan Füredi	(40 puncte)	— Ungaria,
Vladimir Burkov	(40 puncte)	— U.R.S.S.,
Serghei Koneaghin	(40 puncte)	— U.R.S.S.

Pe echipe s-au obţinut următoarele rezultate:

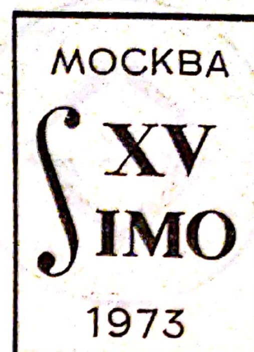
Ţara	Premii		
	I (40 puncte)	II (30–39 puncte)	III (19–29 puncte)
Anglia	—	2	4
Austria	—	—	5
Bulgaria	—	—	2
Cehoslovacia	—	—	4
Cuba	—	—	—
R.D.G.	1	3	4
Iugoslavia	—	—	3
Olanda	—	—	—
Mongolia	—	—	—
Polonia	1	1	1
România	1	3	1
Suedia	—	—	2
Ungaria	3	3	2
U.R.S.S.	2	4	2

Numărul problemei	Punctajul maxim	Numărul de concurenţi avînd acelaşi punctaj								
		8	7	6	5	4	3	2	1	0
81	5	—	—	—	61	1	1	0	9	35
82	6	—	—	24	14	12	16	14	11	16
83	7	—	30	4	0	0	3	1	3	66
84	7	—	51	1	6	3	2	0	18	26
85	7	—	25	3	8	2	6	9	5	49
86	8	28	2	6	5	7	9	9	12	29

A cincisprezecea Olimpiadă internaţională de matematică

A cincisprezecea Olimpiadă internaţională de matematică s-a desfăşurat între 5 iulie şi 16 iulie 1973 în U.R.S.S. în oraşul Moscova.

Premiul întîi a fost obţinut de către elevii :



Serghei Koneaghin (40 puncte) — U.R.S.S.,
Pavel Grozman (39 puncte) — U.R.S.S.,
Gheorghi Egorov (39 puncte) — U.R.S.S.,
Janos Kollar (38 puncte) — Ungaria,
David Gotto (35 puncte) — Anglia.

Pe echipe s-au obţinut următoarele rezultate :

Ţara	Premii I (35—40 puncte)	Premii II (27—33 puncte)	Premii III (17—26 puncte)
Anglia	1	—	5
Austria	—	—	6
Bulgaria	—	—	1
Cehoslovacia	—	1	4
Cuba	—	—	1
Finlanda	—	—	2
Franţa	—	3	1
R.D.G.	—	3	4
Iugoslavia	—	—	5
Mongolia	—	—	1
Olanda	—	—	2
Polonia	—	2	4
România	—	1	3
Suedia	—	1	1
Ungaria	1	2	5
U.R.S.S.	3	2	3

Numărul problemei	Punctajul maxim	Numărul de concurenţi avînd acelaşi punctaj								
		8	7	6	5	4	3	2	1	0
87	6	—	—	37	6	3	5	14	15	45
88	6	—	—	48	6	4	0	0	2	65
89	8	42	4	8	4	4	6	9	15	33
90	6	—	—	38	22	20	14	9	8	14
91	6	—	—	62	3	2	1	2	17	38
92	8	10	2	2	3	3	1	2	1	101

A şaisprezecea Olimpiadă internaţională de matematică

A şaisprezecea Olimpiadă internaţională de matematică s-a desfăşurat între 4 iulie şi 17 iulie 1974 în R.D.G. în oraşele Erfurt şi Berlin.



Premiul întîi a fost obținut de către elevii:

Herbert Zinwell	(40 puncte)	— Austria,
Jean-Cristoph Ecose	(40 puncte)	— Franța,
Adrian Ocneanu	(40 puncte)	— România,
Michael Steiner	(40 puncte)	— Suedia,
Janos Kollar	(40 puncte)	— Ungaria,
Alexandr Grigorean	(40 puncte)	— U.R.S.S.,
Iosef B. Varga	(39 puncte)	— Iugoslavia,
Dmitrii Tiukavkin	(39 puncte)	— U.R.S.S.,
Miodrag Jivkovici	(38 puncte)	— Iugoslavia,
Hoang Le Ming	(38 puncte)	— Vietnam.

Pe echipe s-au obținut următoarele rezultate:

Țara	Premii I (38–40 puncte)	Premii II (30–37 puncte)	Premii III (23–29 puncte)
Anglia	—	1	3
Austria	1	1	4
Bulgaria	—	1	4
Cehoslovacia	—	—	2
Cuba	—	—	—
Finlanda	—	—	1
Franța	1	1	3
R.D.G.	—	5	2
Iugoslavia	2	1	2
Olanda	—	—	1
Mongolia	—	—	—
Polonia	—	—	2
România	1	1	3
Suedia	1	1	—
S.U.A.	—	5	3
Ungaria	1	3	3
U.R.S.S.	2	3	2
Vietnam	1	1	2

Numărul problemei	Punctajul maxim	Numărul de concurenți avînd același punctaj: 8	7	6	5	4	3	2	1	0
93	5	—	—	—	114	8	6	6	1	5
94	6	—	—	64	7	18	4	5	14	28
95	8	35	5	1	1	2	9	7	18	62
96	6	—	—	90	15	11	10	10	0	4
97	7	—	27	8	15	13	9	13	21	34
98	8	35	8	3	5	1	2	7	28	51

A șaptesprezecea Olimpiadă internațională de matematică

A șaptesprezecea Olimpiadă internațională de matematică s-a desfășurat în iulie 1975 în Bulgaria în orașele Burgas și Sofia.

Premiul întîi a fost obținut de către elevii:

John Rickard	(40 puncte)	— Anglia,
Jonathan Hitchock	(40 puncte)	— Anglia,
Jean-Claude Sicorave	(40 puncte)	— Franța,
Paul Voita	(40 puncte)	— S.U.A.,
Paul Herdeg	(40 puncte)	— S.U.A.,
Boris Iusin	(40 puncte)	— U.R.S.S.,
Wilfried Pascher	(39 puncte)	— Austria,
Miller Pockett	(39 puncte)	— S.U.A.

Pe echipe s-au obținut următoarele rezultate:

Țară	Premii I (39–40 puncte)	Premii II (32–37 puncte)	Premii III (22–31 puncte)	Punctaj general
Anglia	2	2	2	241
Austria	1	1	1	192
Bulgaria	—	1	4	186
Cehoslovacia	—	—	2	162
Franța	1	1	1	176
R.D.G.	—	4	4	249
Grecia	—	1	—	95
Iugoslavia	—	1	2	163
Olanda	—	—	1	67
Mongolia	—	—	1	75
Polonia	—	1	1	124
România	—	1	3	180
Suedia	—	2	—	160
S.U.A.	3	1	3	247
Ungaria	—	5	3	258
U.R.S.S.	1	3	4	246
Vietnam	—	1	3	175

A optsprezecea Olimpiadă internațională de matematică

A optsprezecea Olimpiadă internațională de matematică s-a desfășurat în iulie 1976 în Austria în orașul Linz.



Premiul întîi a fost obținut de către elevii:

L. Pierre	(40 puncte)	— Franța,
T. Hovanova	(39 puncte)	— U.R.S.S.,
M. Kleman	(38 puncte)	— S.U.A.,
A. Goncearov	(37 puncte)	— U.R.S.S.,
S. Finașin	(37 puncte))	— U.R.S.S.,
J. Rickard	(35 puncte)	— Anglia,
R. Meson	(34 puncte)	— Anglia,
K. Grill	(34 puncte)	— Austria,
N. Nețvetaev	(34 puncte))	— U.R.S.S.

Pe echipe s-au obținut următoarele rezultate:

Țara	Premii		
	I (34—40 puncte)	II (23—31 puncte)	III (15—22 puncte)
Anglia	2	4	1
Austria	1	2	5
Bulgaria	0	2	6
Cehoslovacia	0	1	3
Cuba	0	0	0
Finlanda	0	0	1
Franța	1	3	1
R.D.G.	0	2	3
Grecia	0	0	0
Iugoslavia	0	1	3
Olanda	0	0	1
Polonia	0	0	6
România	0	1	3
Ungaria	0	3	4
U.R.S.S.	4	3	1
Suedia	0	1	3
S.U.A.	1	4	1
Vietnam	0	1	3

A nouăsprezecea Olimpiadă internațională de matematică

A nouăsprezecea Olimpiadă internațională de matematică s-a desfășurat între 1 iulie și 13 iulie 1977 în Iugoslavia, în orașul Belgrad

Pe echipe s-au obținut următoarele rezultate:

Țara	Premii I (34–40 puncte)	Premii II (24–33 puncte)	Premii III (17–23 puncte)	Punctaj general
Algeria	—	—	—	17
Anglia	1	3	3	190
Austria	1	1	2	151
Belgia	—	—	—	33
Bulgaria	—	3	3	172
Cehoslovacia	—	3	2	161
Cuba	—	—	—	41
Finlanda	—	—	1	88
Franța	1	—	—	127
R.D.G.	2	1	1	163
R.F.G.	1	1	4	165
Italia	—	—	—	22
Iugoslavia	—	3	3	159
Mongolia	—	—	—	49
Olanda	1	2	3	185
Polonia	1	2	2	157
România	—	1	2	122
Suedia	1	1	2	137
S.U.A.	2	3	1	202
Ungaria	1	3	2	190
U.R.S.S.	1	2	4	192

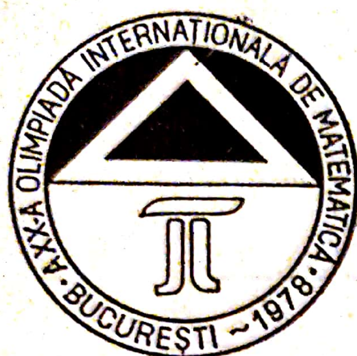
A douăzecea Olimpiadă internațională de matematică

A douăzecea Olimpiadă internațională de matematică s-a desfășurat între 6 și 12 iulie 1978 în România, în orașele București și Bușteni.

Premiul întîi a fost obținut de către elevii:

Mark Kleiman (40 puncte) — S.U.A.
Richard Ewen Borcherds (39 puncte) — Anglia.
Nistor Victor (37 puncte) — România
Enescu Bogdan (36 puncte) — România
Weselmann Uwe (35 puncte) — R.F.G.

Pe echipe s-au obținut următoarele rezultate:



Țara	Premii I (35–40 puncte)	Premii II (27–34 puncte)	Premii III (22–26 puncte)	Punctaj general
Anglia	1	2	—	201
Austria	—	3	—	174
Bulgaria	—	1	—	182
Cehoslovacia	—	2	—	195
Cuba	—	—	—	136
Finlanda	—	—	—	118
Franța	—	2	2	179
R.F.G.	1	—	1	184
Iugolsavia	—	1	—	171
Mongolia	—	—	—	61
Olanda	—	1	1	157
Polonia	—	—	—	156
România	2	3	—	237
S.U.A.	1	3	1	225
Suedia	—	—	—	117
Turcia	—	—	—	66
Veitnam	—	2	—	200

2

PROBLEME

PROBLEMELE OLIMPIADELOR INTERNAŢIONALE DE MATEMATICĂ

Prima Olimpiadă internaţională de matematică

1. Să se demonstreze că fracţia $\frac{21n+4}{14n+3}$ este ireductibilă pentru oricare număr natural n.

(Polonia)

2. Să se determine valorile reale ale lui x pentru care are loc fiecare din egalităţile următoare:

a) $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=\sqrt{2}$;

b) $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=1$;

c) $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=2$.

(România)

3. Se dau numerele reale a, b, c şi unghiul x astfel încît să fie satisfăcută relaţia

$$a\cos^2 x+b\cos x+c=0.$$

Să se găsească ce relaţie de gradul al doilea este satisfăcută de a, b, c şi $\cos 2x$. Să se compare relaţia găsită cu cea dată pentru cazul $a=4$, $b=2$, iar $c=-1$.

(Ungaria)

4. Să se construiască un triunghi dreptunghic de ipotenuză dată c, dacă se cunoaşte că mediana corespunzătoare ipotenuzei este media geometrică a catetelor triunghiului.

(Ungaria)

5. Se dă segmentul AB şi un punct oarecare M situat în interiorul său. Pe segmentele AM şi MB ca laturi, se construiesc în acelaşi plan pătratele $AMCD$ şi $MBEF$ situate de aceeaşi parte a lui AB. Cercurile de centre P şi Q care sînt circumscrise pătratelor se intersectează în punctele M şi N.

a) Să se arate că dreptele AF şi BC trec prin punctul N.

b) Să se arate că pentru orice poziţie a punctului M dreapta MN trece printr-un punct fix S.

c) Să se găsească locul geometric al mijloacelor segmentelor PQ cînd punctul M parcurge segmentul AB.

(România)

6. Se dau două plane P şi Q care se intersectează după dreapta p. În planul P se dă punctul A şi în planul Q punctul C. Nici unul din aceste puncte nu este situat pe dreapta p. Să se construiască în planul P punctul B, iar în planul Q punctul D, astfel ca acestea să fie vîrfuri ale trapezului isoscel $ABCD$ ($AB \parallel CD$) în care se poate înscrie un cerc.

(Cehoslovacia)

A doua Olimpiadă internaţională matematică

7. Să se determine toate numerele de trei cifre care prin împărţire la 11 dau un cît egal cu suma pătratelor cifrelor numărului iniţial.

(Bulgaria)

8. Să se determine valorile reale ale lui x pentru care este satisfăcută inegalitatea

$$\frac{4x^2}{(1-\sqrt{1+2x})^2} < 2x + 9.$$

(Ungaria)

9. Se dă un triunghi dreptunghic ABC a cărui ipotenuză de lungime a este împărțită în n părți egale (n este un număr impar). Fie α unghiul sub care se vede din punctul A acela dintre segmentele egale între ele, pe care se află mijlocul ipotenuzei. Să se demonstreze că

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{4nh}{(n^2 - 1)a},$$

unde h este înălțimea triunghiului.

(România)

10. Să se construiască triunghiul ABC dacă se cunosc: înălțimea h_a și mediana m_a care corespund laturii a și înălțimea h_b corespunzătoare laturii b.

(Ungaria)

11. Se dă cubul $ABCDA'B'C'D'$ (v. fig. 9).

a) Să se găsească locul geometric al mijloacelor segmentelor XY, unde X este un punct oarecare al segmentului AC și Y un punct oarecare al segmentului $B'D'$.

b) Să se găsească locul geometric al punctelor Z situate pe segmentul XY și care satisfac relația $ZY = 2\,XZ$.

(Cehoslovacia)

12. Se dă un trapez isoscel avînd bazele a și b, iar înălțimea h.

a) Să se construiască punctul P, situat pe axa de simetrie a trapezului, astfel ca din P ambele laturi egale ale trapezului să se vadă sub unghiuri drepte.

b) Să se determine distanța de la punctul P la una din bazele trapezului.

c) În ce condiții este posibilă construcția punctului P?

(Bulgaria)

13. Într-un con circular drept se înscrie o sferă. Sferei i se circumscrie un cilindru circular drept a cărui bază este situată în planul bazei conului dat. Fie V_1 volumul conului și V_2 volumul cilindrului.

a) Să se demonstreze că nu poate avea loc egalitatea $V_1 = V_2$.

b) Să se găsească valoarea minimă a lui k pentru care are loc egalitatea $V_1 = k\,V_2$ și să se construiască în acest caz unghiul de la vîrful secțiunii axiale a conului.

(R.D.G.)

A treia Olimpiadă internațională de matematică

14. Să se rezolve sistemul de ecuații

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ x^2 + y^2 + z^2 = b^2 \\ xy = z^2 \end{cases}$$

unde a și b sînt numere reale date. Ce condiții trebuie să satisfacă a și b pentru ca soluțiile sistemului să fie pozitive și distincte?

(Ungaria)

15. Se dau lungimile a, b, c ale laturilor unui triunghi de arie S. Să se demonstreze că are loc relația

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 4S\sqrt{3}.$$

În ce caz are loc egalitatea?

(Polonia)

16. Să se rezolve ecuația

$$\cos^n x - \sin^n x = 1,$$

unde n este un număr natural oarecare.

(Bulgaria)

17. Se dă triunghiul $P_1P_2P_3$ și un punct oarecare P situat în interiorul său. Fie Q_1, Q_2, Q_3 punctele de intersecție ale dreptelor P_1P, P_2P și P_3P cu laturile opuse respectiv lui P_1, P_2 și P_3. Să se demonstreze că printre rapoartele

$$\frac{P_1P}{PQ_1}, \frac{P_2P}{PQ_2}, \frac{P_3P}{PQ_3}$$

există cel puțin unul care nu este mai mare ca 2 și cel puțin unul care nu este mai mic decît 2.

(R.D.G.)

18. Să se construiască triunghiul ABC în care se dau $AC = b$, $AB = c$ şi $\sphericalangle AMB = \omega$ $(\omega < 90°)$, unde M este mijlocul segmentului BC. Să se demonstreze că problema se poate rezolva dacă şi numai dacă $b \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} \leqslant c < b$. În ce caz are loc egalitatea?

(Cehoslovacia)

19. Se dă planul ε şi trei puncte A, B, C nesituate pe aceeaşi dreaptă şi aflate de aceeaşi parte a planului ε. Planul care trece prin punctele A, B, C nu este paralel cu planul ε. În planul ε se iau trei puncte oarecare A', B', C'. Fie L, M şi N mijloacele segmentelor AA', BB' şi CC' respectiv, iar, G baricentrul triunghiului LMN (se exclud poziţiile punctelor A' B', C' pentru care L, M, N nu formează un triunghi). Să se găsească locul geometric al punctelor G cînd A', B', C' sînt mobile în planul ε independent unul de celălalt.

(România)

A patra Olimpiadă internaţională de matematică

20. Să se găsească cel mai mic număr natural n, care are următoarele proprietăţi:

a) scrierea sa în sistemul zecimal se termină cu cifra 6;

b) dacă se şterge ultima cifră 6 şi să o scrie apoi înaintea celorlalte cifre, se obţine un număr de patru ori mai mare decît numărul iniţial.

(Polonia)

21. Să se găsească toate numerele reale x, care satisfac inegalitatea

$$\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1} > \frac{1}{2}.$$

(Ungaria)

22. Se dă cubul $ABCDA'B'C'D'$, $ABCD$ fiind baza superioară a sa, iar $A'B'C'D'$ baza inferioară, $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$. Punctul X se mişcă cu viteză constantă pe laturile pătratului $ABCD$, în sensul $ABCDA$, iar punctul Y se mişcă cu aceeaşi viteză pe laturile pătratului $B'C'CB$, în sensul $B'C'CBB'$. Punctele X şi Y încep

mişcarea simultan din poziţiile iniţiale A, respectiv B'. Să se găsească şi să se figureze locul geometric al mijloacelor segmentelor XY.

(Cehoslovacia)

23. Să se rezolve ecuaţia

$$\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1.$$

(România)

24. Pe cercul K se iau trei puncte diferite: A, B, C. Să se construiască (cu rigla şi compasul) pe cercul K un al patrulea punct D, astfel ca în patrulaterul $ABCD$ să se poată înscrie un cerc.

(Bulgaria)

25. Se dă triunghiul isoscel ABC, avînd raza cercului circumscris r, iar raza cercului înscris ρ. Să se demonstreze că distanţa între centrele acestor cercuri este $d = \sqrt{r(r - 2\rho)}$.

(R.D.G.)

26. Un tetraedru $SABC$ are proprietatea că există cinci sfere, tangente la muchiile tetraedrului SA, SB, SC, AB, BC şi CA sau la prelungirile lor. Să se demonstreze că:

a) tetraedrul $SABC$ este regulat;

b) reciproc, pentru orice tetraedru regulat există cinci sfere, cu proprietatea din enunţ.

(U.R.S.S.)

A cincea Olimpiadă internaţională de matematică

27. Să se găsească rădăcinile reale ale ecuaţiei

$$\sqrt{x^2 - p} + 2\sqrt{x^2 - 1} = x,$$

unde p este un parametru real.

(Cehoslovacia)

28. Să se găsească în spaţiu locul geometric al vîrfurilor unghiurilor drepte pentru care o latură trece prin punctul fix A, iar cealaltă are cel puţin un punct comun cu segmentul BC.

(U.R.S.S.)

29. Să se demonstreze că, dacă într-un poligon convex toate unghiurile sînt egale, iar laturile scrise succesiv satisfac relaţiile: $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant \ldots \geqslant a_n$, atunci $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_n$.

(Ungaria)

30. Să se găsească toate soluţiile sistemului

$$\begin{cases} x_5 + x_2 = y\, x_1, & (1) \\ x_1 + x_3 = y\, x_2, & (2) \\ x_2 + x_4 = y\, x_3, & (3) \\ x_3 + x_5 = y\, x_4, & (4) \\ x_4 + x_1 = y\, x_5, & (5) \end{cases}$$

unde y este un parametru.

(U.R.S.S.)

31. Să se demonstreze că

$$\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}.$$

(R.D.G.)

32. Cinci elevi A, B, C, D, E au participat la un concurs. Încercînd să anticipeze rezultatele competiţiei, cineva a presupus că se va obţine clasamentul A, B, C, D, E. S-a constatat că el nu a indicat corect locul nici unui participant şi nici o pereche de concurenţi clasaţi succesiv. Altcineva, presupunînd clasamentul D, A, E, C, B, a indicat corect primii doi clasaţi şi de asemenea două perechi de concurenţi care au ocupat locuri succesive. Care a fost de fapt rezultatul concursului?

(Ungaria)

A şasea Olimpiadă internaţională de matematică

33. a) Să se găsească toate numerele naturale n pentru care numărul $2^n - 1$ este divizibil cu 7.

b) Să se demonstreze că pentru nici un număr natural n numărul $2^n + 1$ nu este divizibil cu 7.

(Cehoslovacia)

3—c. 1664

34 Se notează cu a, b, c lungimile laturilor unui triunghi oarecare. Să se demonstreze că

$$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)\leqslant 3\,abc.$$

(Ungaria)

35. În triunghiul ABC de laturi a, b, c se înscrie un cerc și se construiesc tangentele la cerc, paralele cu laturile triunghiului dat. Aceste tangente determină cu laturile triunghiului ABC trei noi triunghiuri, în care se înscrie cîte un cerc. Să se calculeze suma ariilor tuturor acestor patru cercuri.

(Iugoslavia)

36. Fiecare membru al unui grup de 17 savanți corespondează cu ceilalți. În corespondența lor este vorba numai despre trei teme. Fiecare pereche de savanți corespondează numai pe o singură temă. Să se demonstreze că cel puțin trei savanți corespondează întrei ei pe aceeași temă.

(Ungaria)

37. Se dau cinci puncte în plan. Printre dreptele care unesc aceste cinci puncte nu se găsesc drepte paralele, perpendiculare sau confundate. Se duc prin fiecare punct perpendicularele pe toate dreptele care se obțin unind cîte două celelalte patru puncte. Care este numărul maxim de puncte de intersecție ale acestor perpendiculare între ele, fără a lua în considerație și cele cinci puncte date?

(România)

38. Se dă tetraedrul $ABCD$. Vîrful D se unește cu centrul de greutate D_1 al feței opuse. Prin vîrfurile triunghiului ABC se duc paralele la DD_1 care intersectează fețele opuse în punctele A_1, B_1, C_1. Să se demonstreze că volumul tetraedrului $ABCD$ este de trei ori mai mic decît volumul tetraedrului $A_1B_1C_1D_1$. Dacă punctul D_1 se ia arbitrar în interiorul triunghiului ABC, se păstrează rezultatul?

(Polonia)

A șaptea Olimpiadă internațională de matematică

39. Să se găsească toate numerele reale x care aparțin segmentului $[0,\ 2\pi]$ și satisfac inegalitatea

$$2\cos x\leqslant\left|\sqrt{1+\sin 2x}-\sqrt{1-\sin 2x}\right|\leqslant\sqrt{2}.$$

(Iugoslavia)

40. Se dă sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 = 0, \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 = 0, \\ a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 = 0, \end{cases}$$

ai cărui coeficienţi satisfac condiţiile:

a) a_{11}, a_{22}, a_{33} sînt pozitivi;
b) toţi ceilalţi coeficienţi sînt negativi;
c) suma coeficienţilor fiecărei ecuaţii este pozitivă.

Să se demonstreze că $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ este singura soluţie a sistemului dat.

(Polonia)

41. Se dă tetraedrul $ABCD$. Fie a lungimea muchiei AB şi b lungimea muchiei CD. Distanţa dintre AB şi CD este d, iar mărimea unghiului acestor drepte ω. Un plan paralel cu muchiile AB şi CD împarte tetraedrul în două părţi. Să se calculeze raportul volumelor acestor părţi, dacă se ştie că raportul distanţelor de la P la AB şi de la P la CD este k.

(Cehoslovacia)

42. Să se găsească patru numere reale x_1, x_2, x_3, x_4, astfel ca fiecare dintre ele, adunat cu produsul celorlalte trei, să dea 2.

(U.R.S.S.)

43. În triunghiul OAB mărimea unghiului AOB este α ($\alpha < 90°$). Printr-un punct oarecare M, care nu coincide cu O, se duc perpendicularele MP pe OA şi MQ pe OB. Fie H ortocentrul triunghiului OPQ. Să se găsească locul geometric al punctelor H, dacă:

a) M parcurge segmentul AB;
b) M parcurge interiorul triunghiului AOB.

(România)

44. Se dau în plan n puncte ($n \geq 3$). Fie d distanţa maximă între oricare dintre aceste două puncte, pe care o vom numi diametru al sistemului de puncte dat. Să se demonstreze că între punctele sistemului diametrul nu se atinge mai mult de n ori.

(Polonia)

A opta Olimpiadă internațională de matematică

45. La olimpiadă au fost date trei probleme A, B, C. 25 elevi au rezolvat cel puțin o problemă. Cei care nu au rezolvat problema A, însă au rezolvat problema B, sînt de două ori mai mulți decît cei care au rezolvat problema C. Elevii care au rezolvat numai problema A sînt cu unul mai mulți decît ceilalți elevi, care au rezolvat problema A. Cîți elevi au rezolvat numai problema B dacă printre cei care au rezolvat numai această problemă jumătate nu au rezolvat problema A?

(U.R.S.S.)

46. Să se demonstreze că, dacă laturile a, b, c ale unui triunghi și unghiurile α, β, γ opuse lor satisfac relația

$$a + b = \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} (a \operatorname{tg} \alpha + b \operatorname{tg} \beta),$$

atunci acest triunghi este isoscel.

(Ungaria)

47. Să se demonstreze că suma distanțelor de la centrul sferei circumscrise unui tetraedru regulat la vîrfurile acestuia este mai mică decît suma distanțelor de la orice alt punct la vîrfurile tetraedrului.

(Bulgaria)

48. Să se demonstreze identitatea

$$\frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 4x} + \ldots + \frac{1}{\sin 2^n x} = \operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} 2^n x,$$

unde n este număr natural, iar $x \neq \frac{\lambda\pi}{2^k}$ $(k = 0, 1, \ldots, n, \lambda \in Z)$.

(Iugoslavia)

49. Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} |a_1 - a_2|x_2 + |a_1 - a_3|x_3 + |a_1 - a_4|x_4 = 1, \\ |a_2 - a_1|x_1 + |a_2 - a_3|x_3 + |a_2 - a_4|x_4 = 1, \\ |a_3 - a_1|x_1 + |a_3 - a_2|x_2 + |a_3 - a_4|x_4 = 1, \\ |a_4 - a_1|x_1 + |a_4 - a_2|x_2 + |a_4 - a_3|x_3 = 1, \end{cases}$$

unde a_1, a_2, a_3, a_4 sînt numere reale date, diferite între ele.

(Cehoslovacia)

50. Se dă un triunghi ABC şi punctele M, K, L, situate pe laturile AB, BC, CA respectiv, şi diferite de vîrfurile triunghiului. Să se demonstreze că cel puţin una dintre ariile triunghiurilor MAL, KBM, LCK nu depăşeşte un sfert din aria triunghiului ABC.

(Polonia)

A noua Olimpiadă internaţională de matematică

51. Se dă paralelogramul $ABCD$ astfel ca triunghiul ABD să fie ascuţitunghic, $AB = a$, $AD = 1$, iar $\sphericalangle BAD = \alpha$. Să se demonstreze că paralelogramul poate fi acoperit cu patru cercuri K_A, K_B, K_C, K_D de rază 1 şi avînd centrele în punctele A, B, C, D respectiv, dacă şi numai dacă

$$a \leqslant \cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha.$$

(Polonia)

52. Într-un tetraedru, dacă o muchie şi numai una singură are lungimea mai mare ca 1, să se demonstreze că volumul tetraedrului nu depăşeşte $\frac{1}{8}$.

(Cehoslovacia)

53. Se dau numerele naturale k, m, n, astfel ca numărul $m + k + 1$ să fie prim şi mai mare decît $n + 1$. Dacă $C_s = s(s + 1)$, să se arate că produsul $(C_{m+1} - C_k)(C_{m+2} - C_k)\ldots(C_{m+n} - C_k)$ se divide prin produsul $C_1C_2\ldots C_n$.

(Anglia)

54. Se dau două triunghiuri ascuţitunghice $A_0B_0C_0$ şi $A_1B_1C_1$. Să se construiască triunghiul ABC asemenea cu triunghiul $A_1B_1C_1$ (vîrfurile notate cu aceeaşi literă se corespund), circumscris triunghiului $A_0B_0C_0$ astfel ca $C_0 \in AB$, $A_0 \in BC$ şi $B_0 \in CA$, iar aria sa să fie maximă.

(Italia)

55. Se dă şirul $\{C_n\}$:

$$\begin{array}{l} C_1 = a_1 + a_2 + \ldots + a_8 \\ C_2 = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_8^2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_n = a_1^n + a_2^n + \ldots + a_8^n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

unde $a_1, a_2, \ldots, a_8$ sînt numere reale, nu toate nule. Printre termenii şirului se găsesc o infinitate de termeni nuli. Să se găsească toate valorile lui n pentru care $C_n = 0$.

(U.R.S.S.)

56. La un concurs sportiv care a durat n zile s-au acordat m medalii. În prima zi au fost înmînate o medalie şi $\frac{1}{7}$ din celelalte $m - 1$ medalii etc. A doua zi au fost înmînate două medalii şi $\frac{1}{7}$ din medaliile care mai rămăseseră. În ultima zi au fost înmînate ultimele n medalii. Cîte zile a durat concursul şi cîte medalii au fost înmînate?

(Ungaria)

A zecea Olimpiadă internaţională de matematică

57. Să se arate că există un singur triunghi avînd lungimile laturilor exprimate prin numere naturale consecutive, iar unul din unghiuri de două ori mai mare decît un alt unghi al său.

(România)

58. Să se găsească toate numerele întregi şi pozitive x, astfel ca produsul tuturor cifrelor lor (x fiind scris în baza 10) să fie

$$x^2 - 10x - 22.$$

(Cehoslovacia)

59. Se dă sistemul de ecuaţii cu necunoscutele $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\begin{cases} a x_1^2 + b x_1 + c = x_2, \\ a x_2^2 + b x_2 + c = x_3, \\ \dots\dots\dots\dots \\ a x_{n-1}^2 + b x_{n-1} + c = x_n, \\ a x_n^2 + b x_n + c = x_1, \end{cases}$$

unde a, b, c sînt numere reale, iar $a \neq 0$. Să se demonstreze că sistemul :

a) nu are soluţii reale, dacă $(b-1)^2 - 4ac < 0$;
b) are o singură soluţie reală, dacă $(b-1)^2 - 4ac = 0$;
c) are mai mult de o soluţie reală, dacă $(b-1)^2 - 4ac > 0$.

(Bulgaria)

60. Să se demonstreze că există un vîrf în orice tetraedru, astfel ca muchiile care trec prin acesta să constituie laturile unui triunghi.

(Polonia)

61. Se dă funcţia $f: R \to R$, avînd proprietatea

$$f(x+a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - [f(x)]^2},$$

oricare ar fi numărul real pozitiv a.

a) Să se demonstreze că funcţia este periodică [adică există $b > 0$, astfel încît $f(x+b) = f(x)$ pentru orice x].

b) În cazul în care $a = 1$, să se dea un exemplu de astfel de funcţie, care însă nu este constantă.

(R.D.G.)

62. Se notează prin $[x]$ partea întreagă a numărului x, adică cel mai mare număr întreg care nu îl depăşeşte pe x. Să se calculeze suma

$$\left[\frac{n+1}{2}\right] + \left[\frac{n+2}{2^2}\right] + \ldots + \left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right] + \ldots$$

dacă n este un număr întreg şi pozitiv, şi să se demonstreze valabilitatea formulei obţinute.

(Anglia)

A unsprezecea Olimpiadă internaţională de matematică

63. Să se demonstreze că există o infinitate de numere naturale a cu proprietatea că numărul $z = n^4 + a$ nu este număr prim pentru nici un număr natural n.

(R.D.G.)

64. Se dau constantele reale $a_1, a_2, \ldots, a_n$, o variabilă reală x şi

$$f(x)=\cos(a_1+x)+\frac{1}{2}\cos(a_2+x)+\frac{1}{2^2}\cos(a_3+x)+\ldots$$

$$\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}\cos(a_n+x).$$

Să se demonstreze că dacă $f(x_1)=f(x_2)=0$, atunci $x_1-x_2=m\pi$, m fiind un număr întreg.

(Ungaria)

65. Pentru oricare $k=1, 2, 3, 4, 5$, să se găsească condiţiile necesare şi suficiente care trebuie îndeplinite de numărul $a>0$ pentru ca să existe un tetraedru avînd k muchii de lungime a, iar celelalte $6-k$ muchii, de lungime 1.

(Polonia)

66. Pe diametrul AB se construieşte semicercul γ. Punctul C, situat pe γ şi diferit de punctul A şi de punctul B, se proiectează ortogonal pe AB în D. Fie semicercurile $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, care au pe AB tangentă comună, γ_1 fiind înscris în triunghiul ABC, iar γ_2 şi γ_3 sînt ambele tangente la CD şi la semicercul γ. Să se demonstreze că γ_1, γ_2 şi γ_3 au o a doua tangentă comună.

(Olanda)

67. Se dau în plan n puncte ($n>4$), oricare trei dintre acestea nefiind situate pe o aceeaşi dreaptă. Să se demonstreze că se pot găsi cel puţin C_{n-3}^2 patrulatere convexe avînd vîrfurile în patru dintre punctele date.

(Mongolia)

68. Să se demonstreze că, dacă $x_1>0$, $x_2>0$, $x_1y_1-z_1^2>0$ şi $x_2y_2-z_2^2>0$, atunci

$$\frac{8}{(x_1+x_2)(y_1+y_2)-(z_1+z_2)^2}\leqslant\frac{1}{x_1y_1-z_1^2}+\frac{1}{x_2y_2-z_2^2}.$$

Să se stabilească condiţiile necesare şi suficiente, pentru ca relaţia de mai sus să devină egalitate.

(U.R.S.S.)

A douăsprezecea Olimpiadă internațională de matematică

69. Se dă triunghiul ABC și punctul M, situat în interiorul laturii AB. Fie r_1, r_2 și r razele cercurilor înscrise respectiv în triunghiurile AMC, BMC și ABC, iar ρ_1, ρ_2 și ρ razele cercurilor care sînt: exînscrise respectiv triunghiurilor AMC, BMC, ABC. Să se demonstreze că

$$\frac{r_1 r_2}{\rho_1 \rho_2} = \frac{r}{\rho}.$$

(Polonia)

70. Se dau numerele naturale a, b și n mai mari ca 1. Numerele a și b constituie bazele a două sisteme diferite de numerație. Numerele A_n și B_n au aceeași scriere $x_n x_{n-1} \ldots x_1 x_0$ în cele două sisteme de numerație ($x_n \neq 0$ și $x_{n-1} \neq 0$). Se notează cu A_{n-1} și B_{n-1} numerele obținute după ștergerea primei cifre a lui A_n, respectiv a lui B_n. Să se demonstreze că $a > b$ dacă și numai dacă

$$\frac{A_{n-1}}{A_n} < \frac{B_{n-1}}{B_n}.$$

(România)

71. Șirul de numere reale $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ satisface condiția

$$1 = a_0 \leqslant a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant \ldots \qquad (1)$$

Se definește șirul $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ astfel:

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{a_{k-1}}{a_k}\right) \frac{1}{\sqrt{a_k}}.$$

Să se demonstreze că: a) $0 \leqslant b_n < 2$, pentru orice n;

b) dacă se dă numărul c astfel ca $0 \leqslant c < 2$, atunci există șirul $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ satisfăcînd condiția (1) astfel ca $b_n > c$ pentru o infinitate de indici n.

(Suedia)

72. Să se determine toate numerele întregi și pozitive n, astfel ca mulțimea $\{n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5\}$ să poată fi descompusă în două mulțimi disjuncte astfel ca produsul tuturor

elementelor uneia din acestea să fie egal cu produsul tuturor elementelor celeilalte mulţimi.

(Cehoslovacia)

73. În tetraedrul $ABCD$, $DB \perp DC$, iar piciorul perpendicularei duse din D pe planul triunghiului ABC este ortocentrul acestui triunghi. Să se demonstreze că $(AB + BC + AC)^2 \leqslant 6(AD^2 + BD^2 + CD^2)$. Pentru care tetraedre are loc egalitatea?

(Bulgaria)

74. Se dau 100 puncte în plan, oricare trei dintre ele nefiind situate pe aceeaşi dreaptă. Să se demonstreze că printre toate triunghiurile cu vîrfurile în aceste puncte există cel mult 70% triunghiuri ascuţitunghice.

(U.R.S.S.)

A treisprezecea Olimpiadă internaţională de matematică

75. Să se demonstreze că afirmaţia „Pentru orice numere reale $a_1, a_2, \ldots, a_n$ are loc inegalitatea

$$(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)\ldots(a_1 - a_n) +$$
$$+ (a_2 - a_1)(a_2 - a_3)\ldots(a_2 - a_n) +$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ (a_n - a_1)(a_n - a_2)\ldots(a_n - a_{n-1}) \geqslant 0\text{“}$$

este adevărată pentru $n = 3$ şi $n = 5$, însă nu este adevărată pentru nici un alt număr natural n $(n > 2)$.

(Ungaria)

76. Se dă un poliedru convex P_1 avînd nouă vîrfuri $A_1, A_2, \ldots, A_9$. Translaţiile care transformă punctul A_1 în punctele $A_2, A_3, \ldots, A_9$ respectiv vor transforma poliedrul dat în poliedrele $P_2, P_3, \ldots, P_9$ respectiv. Să se demonstreze că cel puţin două dintre poliedrele $P_1, P_2, \ldots, P_9$ au un punct interior comun.

(U.R.S.S.)

77. Să se demonstreze că şirul $\{2^n - 3\}$ $(n > 1)$ conţine o infinitate de numere prime între ele două cîte două.

(Polonia)

78. Se dă tetraedrul $ABCD$ cu fețele triunghiuri ascuțitunghice. Se consideră toate liniile poligonale închise $XYZTX$, X, Y, Z, T fiind puncte interioare ale laturilor AB, BC, CD, respectiv DA. Să se demonstreze că:

a) dacă $\sphericalangle DAB + \sphericalangle BCD \neq \sphericalangle ABC + \sphericalangle CDA$, atunci printre aceste linii frînte nu există nici una de lungime minimă;

b) dacă $\sphericalangle DAB + \sphericalangle BCD = \sphericalangle ABC + \sphericalangle CDA$, atunci există o infinitate de astfel de linii frînte; lungimea minimă a unei astfel de linii este $2AC \sin \frac{\alpha}{2}$, unde $\alpha = \sphericalangle BAC + \sphericalangle CAD + \sphericalangle DAB$.

(Olanda)

79. Să se demonstreze că pentru orice număr natural m există în plan o mulțime S de puncte, nevidă și finită, astfel că, oricare ar fi punctul A din S, în S există exact m puncte situate la distanța 1 de punctul A.

(Bulgaria)

80. Se dă tabloul pătrat

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{matrix}$$

format din numere întregi nenegative și astfel încît dacă $a_{ij} = 0$, atunci

$$a_{i1} + a_{i2} + \dots + a_{in} + a_{1j} + a_{2j} + \dots + a_{nj} \geqslant n.$$

Să se demonstreze că suma elementelor acestui tablou este cel puțin $\frac{1}{2} n^2$.

(Suedia)

A paisprezecea Olimpiadă internațională de matematică

81. Se dau zece numere naturale diferite între ele și formate din cîte două cifre. Să se demonstreze că se pot forma cu acestea două grupe disjuncte de numere, astfel încît suma numerelor

ce alcătuiesc una dintre grupe să fie egală cu suma numerelor care alcătuiesc cealaltă grupă.

(U.R.S.S.)

82. Să se demonstreze că orice patrulater inscriptibil poate fi descompus în n $(n \geqslant 4)$ patrulatere inscriptibile.

(Olanda)

83. Să se demonstreze că oricare ar fi numerele întregi nenegative m şi n, numărul $\frac{(2m)!\,(2n)!}{m!\,n!\,(m+n)!}$ este întreg (se face convenţia ca $0! = 1$).

(Anglia)

84. Să se găsească toate soluţiile $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ $(x_i \geqslant 0)$ pentru $i = 1, 2, 3, 4, 5)$ ale sistemului

$$(x_1^2 - x_3x_5)(x_2^2 - x_3x_5) \leqslant 0,$$
$$(x_2^2 - x_4x_1)(x_3^2 - x_4x_1) \leqslant 0,$$
$$(x_3^2 - x_5x_2)(x_4^2 - x_5x_2) \leqslant 0,$$
$$(x_4^2 - x_1x_3)(x_5^2 - x_1x_3) \leqslant 0,$$
$$(x_5^2 - x_2x_4)(x_1^2 - x_2x_4) \leqslant 0.$$

(Olanda)

85. Fie funcţiile $f: R \to R$ şi $g: R \to R$, care satisfac relaţia

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)\,g(y)$$

pentru orice numere reale x şi y. Să se demonstreze, în condiţiile în care f nu este identic nulă, iar $|f(x)| \leqslant 1$ pentru orice număr real x, că $|g(y)| \leqslant 1$ pentru orice număr real y.

(Bulgaria)

86. Se dau patru plane paralele diferite. Să se demonstreze că există un tetraedru regulat avînd cîte un vîrf în fiecare din aceste plane.

(Anglia)

A cincisprezecea Olimpiadă internaţională de matematică

87. Fie O un punct de pe dreapta l, iar $\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2}, \ldots, \overrightarrow{OP_n}$ sînt n vectori de lungime 1, astfel încît punctele $P_1, P_2, \ldots, P_n$ se află

într-un plan care conţine dreapta l şi sînt toate de aceeaşi parte a acesteia. Să se demonstreze că dacă n este un număr impar, atunci

$$|\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} + \ldots + \overrightarrow{OP_n}| \geqslant 1,$$

unde $|\overrightarrow{OM}|$ reprezintă lungimea vectorului $\overrightarrow{OM}$.

(Cehoslovacia)

88. Să se stabilească dacă există în spaţiu o mulţime finită M de puncte necuprinse în acelaşi plan, astfel ca pentru oricare două puncte A şi B din M să se găsească în M alte două puncte C şi D, cu proprietatea că dreptele AB şi CD sînt paralele, dar nu coincid.

(Polonia)

89. Să se găsească valoarea minimă a lui $a^2 + b^2$, dacă a şi b sînt numere reale, iar ecuaţia $x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$ are cel puţin o rădăcină reală.

(Suedia)

90. Un soldat trebuie să verifice absenţa minelor pe un teren în formă de triunghi echilateral. Raza de acţiune a detectorului său este egală cu jumătatea înălţimii triunghiului. Care este drumul minim pe care trebuie să-l urmeze pentru a-şi îndeplini misiunea?

(Iugoslavia)

91. Se dă o mulţime nevidă G de funcţii de forma $f: R \to R$, $f(x) = ax + b$, a, $b \in R$ şi $a \neq 0$, cu proprietăţile:

a) dacă f şi g sînt funcţii din mulţimea G, atunci $g \circ f \in G$ (prin $g \circ f$ înţelegem funcţia cu proprietatea $(g \circ f)(x) = g[f(x)]$, adică G este o mulţime închisă faţă de operaţia de compunere a funcţiilor);

b) dacă funcţia $f \in G$, atunci funcţia inversă $f^{-1} \in G$ $\left(\text{prin funcţia } f^{-1} \text{ înţelegem funcţia cu proprietatea } f^{-1}(x) = \dfrac{x-b}{a}\right)$;

c) pentru orice funcţie $f \in G$ există numărul real x_f, aşa încît $f(x_f) = x_f$.

Să se demonstreze că există un număr real k, astfel încît $f(k) = k$, oricare ar fi funcţia f din mulţimea G.

(Polonia)

92. Se dau numerele reale şi pozitive $a_1, a_2, \ldots, a_n$ şi numărul real q cu proprietatea $0 < q < 1$. Să se găsească n numere reale $b_1, b_2, \ldots, b_n$ astfel ca:

a) $a_k < b_k$ pentru $k = 1, 2, \ldots, n$;

b) $q < \frac{b_{k+1}}{b_k} < \frac{1}{q}$ pentru $k = 1, 2, \ldots, n-1$;

c) $b_1 + b_2 + \ldots + b_n < \frac{1+q}{1-q}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$.

(Suedia)

A şaisprezecea Olimpiadă internaţională de matematică

93. Trei jucători A, B, C joacă un joc cu trei cărţi; pe fiecare din acestea este tipărit un număr întreg. Cele trei numere p, q, r satisfac condiţiile $0 < p < q < r$. Cărţile se amestecă, apoi fiecare jucător primeşte cîte o carte şi cîştigă atîtea bile cît indică numărul de pe cartea sa. Cărţile se restituie după fiecare din cele N jocuri, iar bilele cîştigate rămîn la jucători. După cel puţin două jocuri A are 20 bile, B are 10 bile, iar C are 9 bile. Dacă în ultimul joc B a obţinut r bile, cine a obţinut la primul joc q bile?

(S.U.A.)

94. Se dă triunghiul ABC. Să se demonstreze că pentru a găsi pe segmentul AB un punct D astfel ca CD să fie media geometrică a lui AD şi BD, este necesar şi suficient să aibă loc inegalitatea

$$\sin A \sin B \leqslant \sin^2 \frac{C}{2}.$$

(Finlanda)

95. Să se demonstreze că, oricare ar fi numărul natural n, numărul

$$\sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k+1} 2^{3k}$$

nu este divizibil cu 5.

(România)

96. Se consideră descompunerile unei table de şah (8×8 pătrăţele) în p dreptunghiuri disjuncte care satisfac condiţiile:

a) Fiecare dreptunghi este format dintr-un număr de pătrăţele întregi şi conţine un număr egal de pătrăţele albe şi negre.

b) Dacă a_i este numărul pătratelor albe din dreptunghiul i, atunci $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_p$.

Să se determin cea mai mare valoare a lui p pentru care există o asemenea descompunere şi apoi, pentru acea valoare a lui p, să se determine toate succesiunile $a_1, a_2, \ldots, a_p$ pentru care se poate realiza o astfel de descompunere.

(Bulgaria)

97. Să se găsească mulţimea valorilor sumei

$$S = \frac{a}{a+b+d} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{b+c+d} + \frac{d}{a+c+d},$$

unde a, b, c, d sînt numere reale pozitive.

(Olanda)

98. Fie P un polinom, care nu este o constantă, cu coeficienţi întregi, iar $n(P)$ numărul tuturor numerelor întregi diferite între ele pentru care $(P(k))^2 = 1$. Să se demonstreze că $n(P) - \deg(P) \leqslant 2$, unde $\deg(P)$ înseamnă gradul polinomului P.

(Suedia)

A şaptesprezecea Olimpiadă internaţională de matematică

99. Se dau $2n$ numere reale $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_n$ şi $y_1 \geqslant y_2 \geqslant \ldots \geqslant y_n$. Dacă $z_1, z_2, \ldots, z_n$ este o permutare a numerelor $y_1, y_2, \ldots, y_n$, să se demonstreze că are loc inegalitatea

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} (x_i - z_i)^2.$$

(Cehoslovacia)

100. Fie $\{a_k\}_{k \in N}$ un şir infinit de numere întregi astfel încît $a_k < a_{k+1}$. Să se arate că o infinitate de termeni din acest şir pot fi puşi sub forma $a_m = xa_p + ya_q$, unde x şi y sînt întregi pozitivi şi $p \neq q$.

(Anglia)

101. Se dă un triunghi ABC. În exteriorul său se construiesc, în acelaşi plan, triunghiurile BPC, CQA şi ARB astfel ca $\measuredangle PBC =$

$= \sphericalangle CAQ = 45°$, $\sphericalangle BCP = \sphericalangle QCA = 30°$, $\sphericalangle ABR = \sphericalangle BAR = 15°$. Să se demonstreze că $\sphericalangle QRP = 90°$ şi $QR = RP$.

(Olanda)

102. Fie A suma cifrelor numărului 4444^{4444} iar B suma cifrelor lui A. Să se găsească suma cifrelor lui B. Sistemul de numeraţie este cel zecimal.

(U.R.S.S.)

103. Pe un cerc de rază 1 există 1975 de puncte astfel ca lungimea coardei ce uneşte oricare două din acestea să fie un număr raţional?

(U.R.S.S.)

104. Să se determine toate polinoamele de două variabile care satisfac condiţiile:

a) P este un polinom de gradul n omogen în variabilele reale t, x, y:

$$P(tx, ty) = t^n P(x, y);$$

b) pentru orice a, b, c numere reale

$$P(a + b, c) + P(b + c, a) + P(c + a, b) = 0;$$

c) $P(1, 0) = 1$.

(Anglia)

A optsprezecea Olimpiadă internaţională de matematică

105. Se dă un patrulater plan convex de arie 32 cm² în care suma lungimilor unei diagonale şi a două laturi opuse este de 16 cm. Să se găsească toate valorile pe care le poate avea lungimea celeilalte diagonale.

(Cehoslovacia)

106. Se dau polinoamele $P_1(x) = x^2 - 2$, $P_k(x) = P_1(P_{k-1}(x))$, $k = 1, 2, \ldots$ Să se demonstreze că pentru orice n natural toate rădăcinile ecuaţiei $P_n(x) = x$ sînt reale şi diferite între ele.

(Finlanda)

107. O cutie în formă de paralelipiped dreptunghic poate fi complet umplută cu cuburi de volum 1. Aşezînd în ea volumul maxim posibil de cuburi, fiecare avînd volumul 2, cu muchiile para-

lele cu muchiile cutiei, va fi umplut exact 40% din volumul său. Să se determine dimensiunile interioare ale tuturor cutiilor cu aceste proprietăţi. ($\sqrt[3]{2} = 1{,}2599\ldots$).

(Olanda)

108. Să se determine cel mai mare număr ce poate fi scris ca un produs de numere întregi pozitive a căror sumă este 1976.

(S.U.A.)

109. Se consideră un sistem de p ecuaţii cu $q = 2p$ necunoscute

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1q}\, x_q = 0,$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2q}\, x_q = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \ldots + a_{pq}\, x_q = 0,$$

în care fiecare coeficient a_{ij} este un element al mulţimii $\{-1, 0, 1\}$. Să se arate că există o soluţie $(x_1, x_2, \ldots, x_q)$ a sistemului astfel încît:

a) toţi $x_j\, (j = 1, 2, \ldots, q)$ sînt întregi;
b) pentru cel puţin un j se găseşte $x_j \neq 0$;
c) $|x_j| \leqslant q$ pentru toţi $j = 1, 2, \ldots, q$.

(Olanda)

110. Se defineşte şirul $\{u_n\}$ prin $u_0=2, u_1=\frac{5}{2}$, $u_{n+1}=u_n(u_{n-1}^2-2)-u_1$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Să se demonstreze că pentru $n \geqslant 1$, $[u_n] = 2^{\frac{2^n-(-1)^n}{2}}$

(Anglia)

A nouăsprezecea Olimpiadă internaţională de matematică

111. În interiorul unui pătrat dat $ABCD$ se construiesc triunghiurile echilaterale ABK, BCL, CDM şi DAN. Să se demonstreze că mijloacele celor patru segmente KL, LM, MN, NK şi mijloacele

celor opt segmente AK, BK, BL, CL, CM, DM, DN, AN sînt cele douăsprezece vîrfuri ale unui dodecagon regulat.

(Olanda)

112. Într-o succesiune finită de numere reale suma oricăror şapte termeni consecutivi este negativă iar suma oricăror unsprezece termeni consecutivi este pozitivă. Să se determine numărul maxim de termeni ai unei astfel de succesiuni.

(Vietnam)

113. Fie n un număr întreg dat mai mare decît 2. Se consideră mulţimea V_n a tuturor numerelor întregi de forma $1 + kn$, $k = 1, 2, 3, \ldots$

Un număr din mulţimea V_n se numeşte indecompozabil în V_n dacă şi numai dacă nu există în V_n două numere p şi q astfel încît $m = pq$.

Să se demonstreze că există un număr r aparţinînd mulţimii V_n, care poate fi scris în mai mult de un singur mod sub formă de produs de numere indecompozabile în mulţimea V_n. Două descompuneri în V_n, care diferă între ele numai prin ordinea factorilor, sînt considerate drept aceeaşi descompunere.

(Olanda)

114. Fie a, b, A şi B patru numere reale date. Se consideră funcţia $f: R \rightarrow R$, dată de

$$f(x) = 1 - a \cos x - b \sin x - A \cos 2x - B \sin 2x.$$

Să se demonstreze că dacă pentru orice număr real x are loc inegalitatea $f(x) \geqslant 0$, atunci $a^2 + b^2 \leqslant 2$ şi $A^2 + B^2 \leqslant 1$.

(Anglia)

115. Fie două numere naturale a şi b. Dacă se împarte $a^2 + b^2$ la $a + b$, se obţine cîtul q şi restul r. Să se determine toate perechile (a, b) pentru care $q^2 + r = 1977$.

(R.F.G.)

116. Fie N mulţimea numerelor întregi pozitive. Se consideră funcţia $f: N \rightarrow N$, care satisface inegalitatea $f(n+1) > f[f(n)]$, oricare ar fi numărul natural n. Să se demonstreze că $f(n) = n$ pentru orice număr natural n.

(Bulgaria)

PROBLEME DIN MATERIALELE JURIULUI OLIMPIADELOR INTERNAȚIONALE DE MATEMATICĂ

117. Se dau în plan $n > 3$ puncte, printre care nu se găsesc trei care să fie situate pe aceeași dreaptă. Există un cerc care să treacă prin cel puțin trei puncte date și să nu conțină în interiorul său nici unul din celelalte puncte?

(Cehoslovacia)

118. Se dau n numere pozitive $a_1, a_2, \ldots, a_n$, astfel încît $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = 1$. Să se demonstreze că

$$(1 + a_1)(1 + a_2)\ldots(1 + a_n) \geqslant 2^n.$$

(R.D.G.)

119. Se dau cinci puncte în plan, printre care nu există trei care să fie situate pe o aceeași dreaptă. Să se demonstreze că printre acestea se găsesc patru puncte care sînt vîrfuri ale unui patrulater convex.

(Polonia)

120. Să se demonstreze inegalitatea

$$\operatorname{tg} \frac{\pi \sin x}{4 \sin \alpha} + \operatorname{tg} \frac{\pi \cos x}{4 \cos \alpha} > 1,$$

pentru toate valorile lui x și ale lui α, care satisfac condițiile

$$0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{3}.$$

(U.R.S.S.)

121. Fie m un poligon plan convex avînd perimetrul l și aria S iar $M(R)$ mulțimea punctelor din spațiu a căror distanță la m nu depășește pe R, iar $V(R)$ este volumul corpului $M(R)$. Să se demonstreze că

$$V(R) = \frac{4\pi}{3} R^3 + \frac{\pi}{2} l R^2 + 2SR.$$

Se consideră că punctul C este situat la o distanță care nu depășește pe R, față de figura m, adică punctul C aparține lui $M(R)$, dacă există pe figura m un punct D situat față de punctul C la o distanță care nu depășește pe R.

(U.R.S.S.)

122. Cum trebuie să fie așezați doi cilindri circulari de lungime infinită, pentru ca aceștia să se intersecteze după o curbă plană (adică o curbă situată în întregime într-un plan)?

(U.R.S.S.)

123. Se dă o cutie cu zahăr tos, o balanță cu două talere și o greutate de 1 g. Să se găsească modul în care se poate cîntări în cel mai scurt timp 1 kg de zahăr. (Se va indica schema cîntăririlor)

(U.R.S.S.)

124. Să se rezolve ecuația

$$\frac{\sin 3x \cos (60^\circ - 4x) + 1}{\sin (60^\circ - 7x) - \cos (30^\circ + x) + m} = 0,$$

m fiind un parametru real.

(România)

125. Să se determine numărul rădăcinilor reale ale ecuației

$$x = 1964 \sin x - 189.$$

(R.D.G.)

126. Să se determine dacă există un număr natural z astfel încît să poată fi scris în două moduri diferite sub forma $z = x! + y!$, x și y fiind două numere naturale care satisfac inegalitatea $x \leqslant y$.

(Cehoslovacia)

127. Să se determine cifrele x, y, z, dacă se cunoaște că egalitatea

$$\sqrt{\underbrace{\overline{xx\ldots x}}_{2n \text{ cifre}} - \underbrace{\overline{yy\ldots y}}_{n \text{ cifre}}} = \underbrace{\overline{zz\ldots z}}_{n \text{ cifre}}$$

are loc cel puțin pentru două valori diferite ale numărului natural n. Să se găsească toate valorile lui n pentru care are loc egalitatea.

(Bulgaria)

128. Fie n numere reale $a_1 > 0, a_2 > 0, \ldots, a_n > 0$. Să se demonstreze inegalitatea

$$C_n^2\left(\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_1a_3}+\ldots+\frac{1}{a_1a_n}+\frac{1}{a_2a_3}+\ldots+\frac{1}{a_2a_n}+\ldots+\frac{1}{a_{n-1}a_n}\right) \geqslant$$

$$\geqslant 4\left(\frac{1}{a_1+a_2}+\frac{1}{a_1+a_3}+\ldots+\frac{1}{a_1+a_n}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{a_2+a_3}+\ldots+\frac{1}{a_2+a_n}+\ldots+\frac{1}{a_{n-1}+a_n}\right)^2$$

şi să se găsească condiţia care trebuie îndeplinită de numerele a_i $(i=1, 2, \ldots, n)$, astfel ca să aibă loc egalitatea.

(Iugoslavia)

129. Să se găsească numărul maxim de regiuni în care este împărţit un disc de segmentele care unesc n puncte situate pe cercul care mărgineşte acest disc.

(Polonia)

130. Se dau punctele A, B, C, D, situate pe un cerc astfel ca AB să fie diametru al cercului, iar CD să nu fie diametru. Să se arate că dreapta care uneşte punctul de intersecţie al tangentelor la cerc în punctele C şi D cu punctul de intersecţie al dreptelor AC şi BD este perpendiculară pe dreapta AB.

(Polonia)

131. Se consideră domeniile P şi Q ale aceluiaşi plan, mărginite de cercul care are centrul S şi raza de lungime 1 şi respectiv de pătratul care are centrul M şi latura de lungime 2. Fie XY ipotenuza triunghiului dreptunghic isoscel XYZ. Să se determine ce domeniu umplu vîrfurile Z ale triunghiurilor dreptunghice XYZ dacă X parcurge domeniul P, iar Y parcurge domeniul Q.

(Cehoslovacia)

132. Fie $ABCD$ şi $A'B'C'D'$ două paralelograme aşezate arbitrar în spaţiu, iar M, N, P, Q patru puncte care împart în acelaşi raport segmentele AA', BB', CC', respectiv DD'.

a) Să se demonstreze că patrulaterul $MNPQ$ este un paralelogram.

b) Să se găsească locul geometric al centrelor paralelogramelor $MNPQ$ în cazul în care punctul M parcurge segmentul AA'. (Vîrfurile paralelogramelor sînt notate consecutiv în ordine alfabetică).

(România)

133. Să se rezolve ecuația

$$\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{p},$$

p fiind un parametru real. Să se cerceteze pentru care valori ale parametrului p ecuația admite soluții și să se stabilească numărul acestora.

(Ungaria)

134. Să se construiască un triunghi dacă se cunosc razele cercurilor exînscrise.

(Ungaria)

135. Se dau trei dreptunghiuri egale. Centrele lor coincid, iar planele în care acestea se găsesc sînt perpendiculare două cîte două. Fiecare dreaptă de intersecție a planelor acestor dreptunghiuri conține cîte o linie mijlocie a acestora, lungimile celor două linii mijlocii fiind diferite între ele. Se consideră poliedrul convex ale cărui vîrfuri sînt date de vîrfurile acestor dreptunghiuri.

a) Să se determine volumul acestui poliedru.

b) Să se stabilească dacă poliedrul poate fi regulat, iar în caz afirmativ să se găsească condițiile în care aceasta are loc.

(Ungaria)

136. Să se demonstreze că volumul V și aria laterală S a unui con circular drept satisfac inegalitatea

$$\left(\frac{6V}{\pi}\right)^2 \leqslant \left(\frac{2S}{\pi\sqrt{3}}\right)^3.$$

În ce caz are loc egalitatea?

(Bulgaria)

137. Fie două paralelograme echivalente P şi P', ale căror laturi a şi b, respectiv a' şi b' satisfac inegalităţile $a' \leqslant a \leqslant b \leqslant b'$, iar segmentul b' poate fi aşezat în întregime în paralelogramul P. Să se demonstreze că paralelogramele P şi P' pot fi descompuse fiecare în aceleaşi patru poligoane.

(Bulgaria)

138. Trei din feţele unui tetraedru sînt triunghiuri dreptunghice, iar cea de-a patra faţă a tetraedrului nu este triunghi obtuzunghic. Să se demonstreze că:

a) condiţia necesară şi suficientă ca şi cea de-a patra faţă a tetraedrului să fie triunghi dreptunghic este ca într-unul dintre vîrfurile tetraedrului două şi numai două dintre unghiurile feţelor să fie drepte;

b) dacă toate feţele tetraedrului sînt triunghiuri dreptunghice, atunci volumul acestuia este dat de $\frac{1}{6}$ din produsul celor mai scurte trei muchii care nu aparţin aceleiaşi feţe.

(Bulgaria)

139. Într-o sală se găsesc n oameni ($n \geqslant 2$). Să se demonstreze că printre ei se găsesc doi oameni care au acelaşi număr de cunoscuţi printre cei prezenţi (se presupune că dacă A este cunoscut al lui B, atunci şi B este cunoscut al lui A; nimeni nu este considerat ca fiind cunoscut al lui însuşi).

(Polonia)

140. Să se demonstreze inegalitatea

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_k)^2 \leqslant k(a_1^2 + \ldots + a_k^2), \qquad (1)$$

k fiind număr natural ($k \geqslant 1$), iar $a_1, a_2, \ldots, a_n$ numere reale oarecare.

b) Să se demonstreze, folosind inegalitatea (1), că în cazul în care numerele reale $a_1, a_2, \ldots, a_n$ satisfac inegalitatea

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geqslant \sqrt{(n-1)(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)}, \qquad (2)$$

toate numerele $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sînt nenegative.

(Cehoslovacia)

141. Se dă cercul avînd centrul S şi raza de lungime 1. Fie ABC un triunghi oarecare circumscris acestui cerc, iar $SA \leqslant SB \leqslant SC$. Să se găsească locul geometric al: a) vîrfurilor A; b) vîrfurilor B; c) vîrfurilor C ale acestor triunghiuri.

(Cehoslovacia)

142. Se dă un număr natural N care se descompune ca sumă a unor numere întregi consecutive.

a) Să se găsească toate aceste descompuneri dacă $N = 550$.

b) Să se determine numărul de astfel de descompuneri ale lui $N = 2^{\alpha} 3^{\beta} 5^{\gamma}$ (α, β şi γ sînt numere naturale). Care din aceste descompuneri conţin numai numere naturale?

c) Să se găsească numărul acestor descompuneri pentru numărul natural oarecare N.

(România)

143. Să se demonstreze că, dacă n este un număr întreg pozitiv, au loc inegalităţile:

a) $\lg (n + 1) > \frac{3}{10n} + \lg n,$

b) $\lg (n!) > \frac{3n}{10}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - 1\right).$

(România)

144. Să se rezolve ecuaţia

$$|x^2 - 1| + |x^2 - 4| = mx$$

şi să se discute rădăcinile sale în funcţie de parametrul real m. Care sînt perechile de numere întregi (x, m) care satisfac egalitatea dată?

(România)

145. Lungimile a, b, c şi a_1, b_1, c_1 ale laturilor triunghiului ABC, respectiv $A_1B_1C_1$ formează cîte o progresie aritmetică, iar $\hat{A} = \hat{A}_1$. Să se demonstreze că în acest caz cele două triunghiuri sînt asemenea.

(Bulgaria)

146. În cel mai mare dintre două cercuri care sînt tangente interior se înscrie un triunghi echilateral. Din vîrfurile sale se duc

tangentele la cercul mai mic. Să se demonstreze că lungimea uneia din aceste tangente este egală cu suma lungimilor celorlalte două tangente.

(Bulgaria)

147. Să se găsească toate perechile (x, y) formate din numere întregi şi pozitive care satisfac ecuaţia $2^x = 3^y + 5$.

(Bulgaria)

148. Polinomul $P(x)=ax^3+bx^2 + cx + d$ are coeficienţii numere întregi, astfel încît ad este număr impar iar bc este număr par. Să se demonstreze că polinomul P admite cel puţin o rădăcină iraţională.

(Polonia)

149. Într-un cerc se înscrie patrulaterul $ABCD$. Să se demonstreze că centrele de greutate ale triunghiurilor ABC, CDA, BCD şi DAB sînt conciclice.

(Polonia)

150. Să se demonstreze că cele patru perpendiculare duse din mijloacele laturilor unui patrulater inscriptibil pe laturile opuse sînt concurente.

(Polonia)

151. Se dau două cercuri concentrice de raze r şi R. Să se determine numărul maxim de cercuri care sînt tangente simultan la cele două cercuri şi nu se intersectează două cîte două. Să se arate că acest număr este cuprins între

$$\frac{3}{2}\frac{\sqrt{R}+\sqrt{r}}{\sqrt{R}-\sqrt{r}} - 1 \quad \text{şi} \quad \frac{63}{20}\frac{R+r}{R-r}$$

(România)

152. Să se găsească rădăcinile reale ale ecuaţiei

$$\sqrt{x^2 + 2px - p^2} - \sqrt{x^2 - 2px - p^2} = 1,$$

p fiind un număr real pozitiv.

(Cehoslovacia)

153. Se dă poligonul regulat plan $A_1A_2\ldots A_n$ $(n \geqslant 3)$. Să se determine numărul de triunghiuri obtuze $A_iA_jA_k$.

(Cehoslovacia)

154. Se dă succesiune de numere întregi $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $n \geqslant 2$. Să se demonstreze că există un subşir $a_{k_1}, a_{k_2}, \ldots, a_{k_m}$ al acestui şir $(1 \leqslant k_1 \leqslant k_2 \leqslant \ldots \leqslant k_m \leqslant n)$ astfel ca numărul $a_{k_1}^2 + a_{k_2}^2 + \ldots$ $\ldots + a_{km}^2$ să se dividă la n.

(Cehoslovacia)

155. Se dau cinci puncte în plan, oricare trei din acestea nefiind situate pe aceeaşi dreaptă. Oricare două din aceste puncte sînt unite printr-un segment fie de culoare roşie, fie de culoare albastră, astfel ca nici un triplet de puncte să nu formeze un triunghi avînd laturile de aceeaşi culoare.

a) Să se demonstreze că:

1) fiecare punct este capăt a două şi numai a două segmente de culoare roşie şi a două şi numai a două segmente de culoare albastră;

2) segmentele de culoare roşie formează o linie poligonală închisă care trece prin toate cele cinci puncte (analog pentru segmentele de culoare albastră).

b) Să se arate cum trebuie unite cele cinci puncte prin segmente de culoare roşie sau albastră, astfel ca să fie îndeplinită condiţia din enunţul problemei.

(Cehoslovacia)

156. Să se determine numărul maxim de sfere avînd raza de lungime 1/2 care pot fi aşezate într-un paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile $10 \times 10 \times 1$.

(Iugoslavia)

157. Un alfabet constă din n litere. Să se găsească lungimea maximă a unui cuvînt, dacă:

a) oricare două litere succesive sînt diferite între ele,

b) prin ştergerea de litere dintr-un cuvînt nu este posibilă obţinerea unor cuvinte de forma *abab* $(a \neq b)$.

(Iugoslavia)

158. Fie

$$f(a, b, c)=\left|\frac{|b-a|}{|ab|}+\frac{b+a}{ab}-\frac{2}{c}\right|+\frac{|b-a|}{|ab|}+\frac{b+a}{ab}+\frac{2}{c}.$$

Să se demonstreze că

$$f(a, b, c) = 4 \max\left\{\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right\}.$$

(Iugoslavia)

159. Se consideră toate dreptele care împart un triunghi în două figuri de aceeaşi arie. Cunoscînd laturile a, b, c ale triunghiului ABC, să se determine lungimea minimă a segmentului determinat pe o astfel de dreaptă de laturile triunghiului şi să se găsească cîte segmente de această lungime minimă se află pe dreptele respective.

(România)

160. Două oglinzi formează un unghi diedru de mărime α. În interiorul acestui unghi se află o lumînare şi un observator. Cîte imagini ale lumînării vede observatorul?

(U.R.S.S.)

161. Se dă un patrulater de arie S, ale cărui laturi au lungimile a, b, c şi d. Să se demonstreze că

$$S \leqslant \frac{a+c}{2} \cdot \frac{b+d}{2}.$$

(U.R.S.S.)

162. n elevi numerotaţi de la 1 la n sînt aşezaţi în ordinea $1, 2, \ldots, n$. La o comandă dată fiecare îşi schimbă locul cu un alt elev sau nu. Este posibil ca după două comenzi să se obţină ordinea $n, 1, 2, \ldots, n-1$?

(U.R.S.S.)

163. Se decupează din hîrtie o figură care are aria egală cu 1, apoi se împarte în 10 zone şi se colorează aceste zone în 10 culori diferite. Se întoarce apoi figura pe partea cealaltă şi se împarte în alt mod tot în 10 zone. Să se demonstreze că aceste 10 zone pot

fi colorate cu aceleași culori ca și cele de pe partea opusă astfel încît suma ariilor zonelor vopsite pe ambele părți în aceeași culoare să nu fie mai mică decît 0,1.

(U.R.S.S.)

164. Să se demonstreze că într-un hexagon convex de arie S se poate duce totdeauna o diagonală care decupează un triunghi a cărui arie nu depășește $\frac{1}{6}S$.

(U.R.S.S.)

165. Se aleg 100 de numere naturale consecutive și se ridică fiecare la puterea a opta. Să se găsească ultimele două cifre cu care se termină suma acestor puteri.

(U.R.S.S.)

166. Se dau vîrful A și centrul de greutate M ale triunghiului ABC. Să se găsească locul geometric al vîrfurilor B, astfel încît unghiurile A, B și C ale triunghiului ABC să satisfacă în același timp condițiile

$$40° \leqslant \hat{A} \leqslant 70°,\ 40° \leqslant \hat{B} \leqslant 70° \text{ și } 40° \leqslant \hat{C} \leqslant 70°.$$

(U.R.S.S.)

167. Se dă un tetraedru în care oricare două muchii opuse sînt perpendiculare. Să se demonstreze că toate cele șase mijloace ale muchiilor sale sînt situate pe o aceeași sferă.

(U.R.S.S.)

168. Să se cerceteze dacă se pot lua pe un cub 100 (sau 200) de puncte, astfel încît la toate rotațiile acestuia punctele să se transforme unele în altele.

(U.R.S.S.)

169. Să se rezolve inecuația

$$\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \forall\ n \in N.$$

(U.R.S.S.)

170. Într-un grup de traducători fiecare cunoaște cel puțin o limbă străină. Printre ei 24 vorbesc japoneza, 24 vorbesc malaieza

iar 24 vorbesc persana. Să se demonstreze că se poate găsi o parte a acestui grup în care se află exact 12 traducători care vorbesc japoneza, exact 12 traducători care vorbesc malaieza și exact 12 traducători care vorbesc persana.

(U.R.S.S.)

171. Se dă binomul $l(z) = Az + B$ avînd coeficienții complecși A și B. Se cunoaște că valoarea maximă a lui $|l(z)|$ pe segmentul $[-1, 1]$ $(y = 0)$ al axei reale din planul complex $z = x + iy$ este M. Să se demonstreze că oricare ar fi $z \in C$, are loc inegalitatea $|l(z)| \leqslant M\rho$, unde ρ reprezintă suma distanțelor de la punctul P care este imaginea numărului complex z, la punctele Q_1 și Q_3 care sînt imagini ale numărului complex $z = 1$, respectiv $z = -1$.

(U.R.S.S.)

172. Pe cercul avînd centrul în O și lungimea razei egală cu 1 se iau punctele $A_1, A_2, \ldots, A_{999}, A_{1000}$ astfel încît $\sphericalangle A_0OA_k = k$ (măsura făcîndu-se în radiani). Să se găsească în cîte arce de lungime diferită împart aceste puncte cercul.

(U.R.S.S.)

173. Să se arate că, oricare ar fi perechea (f, g) de vectori din spațiu, are loc inegalitatea

$$af^2 + bfg + cg^2 \geqslant 0, \qquad \text{(A)}$$

dacă și numai dacă

$$a \geqslant 0,\ c \geqslant 0,\ 4\,ac \geqslant b^2. \qquad \text{(B)}$$

(Ungaria)

174. În triunghiul isoscel ABC, $AB = AC$ și $\sphericalangle BAC = 20°$. Se notează cu D acel punct al laturii AB pentru care $AD = CD$, iar cu E se notează acel punct al laturii AC pentru care $BC = CE$. Să se găsească mărimea unghiului CDE.

(Ungaria)

175. Să se demonstreze că dacă a și b sînt numere reale pozitive, iar m este număr întreg, are loc inegalitatea

$$\left(1 + \frac{a}{b}\right)^m + \left(1 + \frac{b}{a}\right)^m \geqslant 2^{m+1}.$$

(Polonia)

176. Se spune că polinomul $P(x) = a_0x^k + a_1x^{k-1} + \ldots + a_k$ avînd coeficienţii $a_0, a_1, \ldots, a_k$ numere întregi este divizibil cu m, dacă $P(x)$ este multiplu de m pentru orice valoare întreagă a lui x. Să se arate că dacă $P(x)$ este divizibil cu m, atunci $k\,!a_0$ este multiplu de m. Să se demonstreze, de asemenea, că dacă a_0, k şi m sînt numere întregi pozitive astfel încît $k\,!a_0$ este multiplu de m, se poate găsi polinomul $P(x) = a_0x^k + a_1x^{k-1} + \ldots + a_k$ divizibil cu m.

(Anglia)

177. Se dau numerele $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ şi punctul O. Să se arate că există un triunghi echilateral ABC (punctele O, A, B şi C sînt situate în acelaşi plan) astfel ca $OA = x$, $OB = y$ şi $OC = z$ dacă şi numai dacă $x + y \geqslant z$, $y + z \geqslant x$ şi $z + x \geqslant y$.

(Anglia)

178. Fie $[a]$ partea întreagă a numărului a, adică cel mai mare număr întreg care nu depăşeşte pe a, iar $\{a\} = a - [a]$ partea fracţionară a lui a. Să se arate că numerele $\{10^n\sqrt{2}\}$ sînt diferite între ele $(n = 0, 1, \ldots)$.

(Suedia)

179. Două vapoare plutesc pe mare în direcţii fixe, cu viteze constante. La ora 9.00 între vapoare distanţa este de 20 mile, la ora 9.35 de 15 mile, iar la ora 9.55 distanţa este de 13 mile. La ce oră distanţa dintre vapoare este minimă şi care este această distanţă?

(Suedia)

180. Se dă numărul prim impar p. Să se găsească condiţia necesară şi suficientă pentru ca suma pătratelor a $p - 1$ numere naturale consecutive să se dividă la suma acestor numere.

(Cehoslovacia)

181. Se dau n puncte în spaţiu astfel încît oricare trei din acestea sînt vîrfuri ale unui triunghi care are un unghi a cărui mărime depăşeşte 120°. Să se demonstreze că aceste puncte se pot nota cu literele $A_1, A_2, \ldots, A_n$ astfel ca fiecare din unghiurile $A_iA_jA_k$ să fie mai mare decît 120°, dacă $i < j < k$.

(Cehoslovacia)

182. Se dau în spațiu șase puncte $P_j (j = 1, 2, \ldots, 6)$ astfel ca oricare patru dintre acestea să nu fie situate în același plan. Fiecare segment de dreaptă $P_jP_k (j \neq k)$ este colorat în negru sau în alb. Să se demonstreze că există cel puțin un triunghi $P_jP_kP_l$ ale cărui laturi au aceeași culoare.

(Suedia)

183. Să se demonstreze că există o infinitate de numere întregi pozitive care nu pot fi scrise ca suma pătratelor a trei numere întregi.

(Suedia)

184. Să se determine toate numerele reale λ pentru care ecuația

$$\sin^4 x - \cos^4 x = \lambda(\operatorname{tg}^4 x - \operatorname{ctg}^4 x)$$

a) nu are nici o soluție,
b) are o singură soluție,
c) are numai două soluții,
d) are mai mult de două soluții reale pe intervalul $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

(R.D.G.)

185. Să se demonstreze că

$$1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{n^3} < \frac{5}{4}.$$

(Ungaria)

186. Se dau 4000 puncte în plan, astfel ca oricare trei să nu fie situate pe o aceeași dreaptă. Să se demonstreze că există 1000 patrulatere în plan neavînd puncte comune unul cu altul, ale căror vîrfuri se află în punctele date.

(Ungaria)

187. Vîrfurile unui poligon cu $n + 1$ laturi sînt situate pe laturile unui poligon regulat cu n laturi astfel ca perimetrul poligonului cu n laturi să fie împărțit în părți egale. Să se găsească aceste puncte astfel ca aria poligonului cu $n + 1$ laturi să fie : a) maximă, b) minimă.

(Olanda)

188. Se dau numerele întregi și pozitive x_1, x_2, x_3, x_4 și x_5 care satisfac relațiile:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1\,000, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 > 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 > 0, \\ -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 > 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - x_5 > 0, \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + x_5 > 0. \end{cases}$$

a) Să se găsească cea mai mare valoare a puterii $(x_1 + x_3)^{x_2+x_4}$.

b) Să se stabilească în cîte moduri se poate alege x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, astfel ca pentru aceste valori să se atingă această valoare maximă.

(Olanda)

189. Un băiat a construit pentru trenul său jucărie o rețea închisă de linii ferate fără încrucișări și neavînd nici o șină în formă de segment de dreaptă. Rețeaua se compune din mai multe șine care au forma aceluiași sfert de cerc. Unele dintre acestea sînt parcurse în sensul acelor de ceasornic iar celelalte în sensul opus. Să se arate că în rețea există un număr par din fiecare aceste două tipuri de șine, iar numărul tuturor șinelor din rețea este multiplu de patru.

(Olanda)

190. Fie h_n apotema poligonului regulat cu n laturi înscris în cercul de rază R. Să se demonstreze că $(n + 1)h_{n+1} - nh_n > R$.

(Bulgaria)

191. Să se determine raza cercului circumscris unui triunghi isoscel ale cărui laturi au lungimile date de rădăcinile ecuației de gradul al doilea $x^2 - ax + b = 0$.

(Mongolia)

192. Se dă polinomul $f(x)$ care are coeficienții numere întregi, iar pentru $k \in Z$ (k fixat), $f(k)$, $f(k + 1)$ și $f(k + 2)$ sînt multipli de 3. Să se arate că $f(m)$ este multiplu de 3, oricare ar fi numărul întreg m.

(Polonia)

193. Se dau trei numere întregi și pozitive x_1, x_2 și x_3 care satisfac condițiile $x_1x_2x_3 > 1$ și $x_1 + x_2 + x_3 < \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \dfrac{1}{x_3}$.

Să se demonstreze că:
a) nici unul dintre aceste numere nu este egal cu 1;
b) unul și numai unul dintre acestea este mai mic decît 1.

(Iugoslavia)

194. Un parc în formă de pentagon convex are aria $S = 5\sqrt{3} \cdot 100^2$. Un vizitator al parcului, aflat în punctul interior O al acestuia, a observat că nu se găsește la o distanță mai mare de 200 m față de orice vîrf al pentagonului. Să se demonstreze că el nu se găsește la o distanță mai mică decît 100 m față de orice punct situat pe laturile pentagonului.

(Iugoslavia)

195. Se dau numerele întregi nenegative $k_1, k_2, \ldots, k_n$ $(n \geqslant 2)$. Să se demonstreze inegalitatea

$$k_1!\, k_2! \ldots k_n! \geqslant \left(\left[\frac{k}{n}\right]!\right)^n, \quad k = k_1 + k_2 + \ldots + k_n,$$

iar $[x]$ este partea întreagă a numărului x.

(Cehoslovacia)

196. Să se arate că ecuația $x^3 + y^3 + z^3 = 1969^2$ nu admite soluții formate din numere întregi.

(Bulgaria)

197. Să se determine toate funcțiile $f: R \to R$ care satisfac condiția:

$$xf(y) + yf(x) = (x + y)f(x)f(y),$$

oricare ar fi numerele reale x și y. Să se demonstreze că printre aceste funcții se găsesc numai două funcții continue.

(Bulgaria)

198. Peste un pătrat avînd lungimea laturii de 38 cm se așază 100 de poligoane convexe, ale căror arie și perimetru nu depășesc pentru fiecare π cm², respectiv 2π cm. Să se demonstreze că peste pătrat se mai poate suprapune un cerc de rază 1 care nu intersectează nici unul din poligoanele de mai sus.

(Bulgaria)

199. Să se găsească sfera de rază maximă, care încape în fiecare din tetraedrele care au toate înălţimile de lungime mai mare sau egală cu 1.

(Iugoslavia)

200. Se consideră semidreptele OX, OY, OZ şi un punct G situat în interiorul unghiului $OXYZ$. Să se arate cum se poate construi un plan care să treacă prin punctul G şi să intersecteze pe OX, OY, OZ în punctele A, B, respectiv C, astfel ca volumul tetraedrului $OABC$ să fie minim.

(România)

201. Să se stabilească dacă numărul $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$ este sau nu raţional.

(Franţa)

202. Să se găsească locul geometric al centrelor unui cerc de rază 1 atunci cînd acesta este aşezat într-un colţ al camerei în toate poziţiile posibile astfel ca să fie tangent atît la planul podelei cît şi la cei doi pereţi verticali perpendiculari unul pe celălalt.

Observaţie. Pentru a rezolva această problemă este utilă cunoaşterea următoarei teoreme a lui Monge: „Locul geometric al punctelor din care se duc tangente perpendiculare între ele la elipsa de ecuaţie $\frac{x^2}{a^2} + \frac{b^2}{y^2} = 1$ este un cerc numit cercul lui Monge şi avînd ecuaţia $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$".

(Franţa)

203. Se dă sfera plină K. Să se găsească locul geometric al vîrfurilor A ale tuturor paralelogramelor $ABCD$ pentru care diagonala $AC \leqslant BD$, diagonala BD fiind conţinută în întregime în sfera plină K.

(Cehoslovacia)

204. Fie cinci puncte $P_i(x_i, y_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, 5)$ avînd coordonatele întregi. Să se demonstreze că printre triunghiurile care au vîrfurile în aceste puncte se găsesc cel puţin trei care au arii exprimate prin numere întregi.

(Bulgaria)

205. Se dă tetraedrul $ABCD$. Fie $x = AB \cdot CD$, $y = AC \cdot BD$ iar $z = AD \cdot BC$. Să se demonstreze că există un triunghi avînd laturile de lungime x, y, respectiv z.

(Polonia)

206. Fie a un număr real nenul. Pentru fiecare număr întreg n se calculează expresia $S_n = a^n + a^{-n}$. Să se demonstreze că dacă sumele S_k şi S_{k+1} calculate pentru un anumit număr întreg k sînt numere întregi, atunci sumele S_n vor fi numere întregi pentru orice $n \in Z$.

(Vietnam)

207. Să se arate că numărul $2^{147} - 1$ este divizibil prin 343.

(Finlanda)

208. Se dau trei numere reale x, y, z diferite în modul de $\frac{1}{\sqrt{3}}$ şi care satisfac condiţia $x + y + z = xyz$. Să se demonstreze că are loc în acest caz egalitatea

$$\frac{3x - x^3}{1 - 3x^2} + \frac{3y - y^3}{1 - 3y^2} + \frac{3z - z^3}{1 - 3z^2} = \frac{3x - x^3}{1 - 3x^2} \cdot \frac{3y - y^3}{1 - 3y^2} \cdot \frac{3z - z^3}{1 - 3z^2}.$$

(Cuba)

209. Cu ajutorul unui alfabet de trei litere se formează toate cuvintele posibile, unele combinaţii de două sau mai multe litere fiind însă interzise. Se ştie că aceste combinaţii interzise au lungimi diferite între ele. Să se arate că se pot forma cuvinte oricît de lungi care să nu cuprindă combinaţii interzise de litere.

(U.R.S.S.)

210. Suma pătratelor a cinci numere a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 este egală cu 1. Să se demonstreze că cea mai mică dintre valorile $(a_i - a_j)^2$ $(1 \leqslant i \neq j \leqslant 5)$ nu depăşeşte $\frac{1}{10}$.

(U.R.S.S.)

211. Să se afle numărul de soluţii întregi (i, j, k, m) pentru sistemul de inegalităţi:

$$1 \leqslant -j + k + m \leqslant n, \qquad 1 \leqslant i - j + m \leqslant n,$$

$$1 \leqslant i - k + m \leqslant n, \qquad 1 \leqslant i + j - k \leqslant n.$$

Se cunoaşte că sînt satisfăcute inegalităţile $1 \leqslant i, j, k, m \leqslant n$, iar n este un număr întreg dat.

(R.D.G.)

212. Fie $A_0B_0C_0D_0$ un patrulater convex, iar O un punct situat în interiorul acestuia. Se definesc prin recurență patrulaterele $A_nB_nC_nD_n$ astfel: A_{n+1} este piciorul perpendicularei din O pe A_nB_n, B_{n+1} este piciorul perpendicularei duse din O pe B_nC_n, iar C_{n+1} și D_{n+1} sînt picioarele perpendicularelor duse din O pe C_nD_n, respectiv pe D_nA_n. Să se arate că patrulaterele $A_0B_0C_0D_0$ și $A_4B_4C_4D_4$ sînt asemenea.

(Anglia)

213. Se consideră rețeaua punctelor din plan care au ambele coordonate numere întregi. Fiecare punct din această rețea are patru vecini: sus, jos, la dreapta și la stînga. Fie K un cerc de rază $r \geqslant 2$, care nu trece prin nici un punct al rețelei. Prin punct frontieră interior se va înțelege un punct din rețea, situat în interiorul cercului, dar care are cel puțin un vecin în exteriorul cercului. În mod analog se definesc punctele frontieră exterioare. Să se arate că numărul de puncte frontieră exterioare este cu 4 mai mare decît numărul punctelor de frontieră interioare.

(Cehoslovacia)

214. Să se determine toate mulțimile închise și mărginite din plan, care odată cu două puncte conțin un întreg semicerc avînd extremitățile în cele două puncte.

(R.F.G.)

215. Să se arate că următorul algoritm generează o succesiune $w_0, w_1, \ldots, w_2^{n+1}$ formată din toate numerele întregi nenegative care nu depășesc pe 2^{n-1} scrise în sistem binar:

$$w_0 = \underbrace{00\ldots0}_{n \text{ cifre}},$$

iar dacă $w_{m-1} = a_1\ldots a_n$ și j este cel mai mare număr care nu este mai mic decît 1 pentru care m se divide la 2^{j-1}, atunci w_m se obține din w_{m-1} înlocuind pe a_j cu $1 - a_j$.

(R.F.G.)

216. Să se determine numerele $n \geqslant 1$, astfel încît să existe două polinoame f și g, în n variabile, cu coeficienți întregi, neidentic nule, astfel încît să fie satisfăcută relația

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = g(x_1^2, x_2^2, \ldots, x_n^2).$$

(Ungaria)

217. Se consideră toate succesiunile finite $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ formate din termeni a_k, astfel ca $|a_k| = 1$, şi se defineşte produsul a două astfel de succesiuni prin $(a_1, a_2, \ldots, a_n)(b_1, b_2, \ldots, b_n) = (a_1b_1, a_2b_2, \ldots, a_nb_n)$. Fie B o mulţime formată din k astfel de succesiuni. Să se arate că există o succesiune c de acest tip cu proprietatea ca intersecţia mulţimii B cu mulţimea formată din toate produsele succesiunii c cu toate succesiunile din B să conţină cel mult $\frac{k^2}{2^n}$ elemente.

(Polonia)

218. Fie E o mulţime de puncte în spaţiu, nesituate toate în acelaşi plan şi astfel încît oricare trei dintre ele să nu fie situate pe o aceeaşi dreaptă. Să se arate că dacă nu există nici un plan care să conţină exact trei puncte din E, atunci există în E cinci puncte care să constituie vîrfurile unei piramide patrulatere convexe, piramidă care să nu conţină nici un alt punct al lui E.

(Finlanda)

219. Fie numărul întreg $n \geqslant 2$. Se defineşte $x_1 = n$, $y_1 = 1$, $x_{i+1} = \left[\frac{x_i + y_i}{2}\right]$, $y_{i+1} = \left[\frac{n}{x_{i+1}}\right]$. Să se arate că $\min(x_1, x_2, \ldots, x_n) = [\sqrt{n}]$.

(Olanda)

220. Să se determine cel mai mare număr n pentru care există în plan n puncte, avînd coordonatele numere întregi, astfel încît să nu existe printre acestea trei al căror centru de greutate să aibă toate coordonatele numere întregi.

(Vietnam)

PROBLEME DATE LA OLIMPIADE NAŢIONALE

PROBLEME ALE OLIMPIADELOR DIN ANGLIA

221. O placă de lemn în formă de pătrat se taie în n^2 pătrate avînd fiecare aria egală cu 1. Cu ajutorul acestora se formează patru dreptunghiuri şi rămîne un pătrat de arie 1. Cele nouă dimensiuni ale acestor figuri sînt diferite între ele.

a) Să se găsească cea mai mică valoare a lui n care satisface condiţiile din problemă şi să se determine pentru acest caz cele nouă dimensiuni ale figurilor din enunţ.

b) Să se găsească toate valorile lui n care satisfac condiţiile problemei.

222. Să se determine funcţia $f: R \to R$ care nu este identic nulă şi satisface condiţia

$$f(x)f(y) = f(x-y),$$

oricare ar fi numerele reale x şi y.

223. Se dă o mulţime formată din $n+1$ numere întregi pozitive, astfel încît nici unul din aceste numere nu depăşeşte pe $2n$. Să se demonstreze că cel puţin un element al mulţimii se divide la un altul.

224. Să se demonstreze că nici un poliedru convex nu poate avea toate feţele hexagonale.

225. O piesă pentru jocul de domino poate fi reprezentată printr-o pereche neordonată de numere întregi pozitive. Astfel, perechea (1, 5) reprezintă aceeaşi piesă ca şi perechea (5, 1). Mulţimea formată din 15 piese care se reprezintă prin perechi de numere întregi de la 1 la 5 se descompune în trei submulţimi de cîte cinci piese fiecare, astfel încît piesele fiecărei submulţimi pot fi aşezate într-un lanţ închis, adică sub forma (a, b) (b, c) (c, d) (d, e) (e, a), numerele a, b, c, d, e nefiind neapărat diferite între ele. Să se determine în cîte moduri se poate face o astfel de descompunere. Ordinea submulţimilor în descompunere nu este esenţială.

226. Se consideră toate triunghiurile pentru care raza cercului înscris este r. În aceste triunghiuri se înscriu pătrate (a căror latură este x). Să se demonstreze că

$$2r > x > \sqrt{2}\, r.$$

227. Un coridor lung, de lăţime egală cu 1, are forma literei L. O ţeavă metalică lungă (al cărei diametru poate fi neglijat) este trasă pe coridor rămînînd tot timpul în planul podelei. Ştiind că ţeava se poate curba, prin lungimea sa se înţelege distanţa între capetele sale cînd ia forma unui segment de dreaptă. Să se găsească lungimea maximă a ţevii astfel ca să poată fi trasă pe coridor, de-a lungul pereţilor şi curbînd-o la colţul coridorului, fără a o ridica de la podea.

PROBLEME ALE OLIMPIADELOR DIN BULGARIA

228. Să se demonstreze că dacă a este un număr întreg care nu se divide la 5, polinomul $f(x) = x^5 - x + a$ nu se poate descompune în produs a două polinoame cu coeficienţi întregi.

229. Se scriu toate numerele compuse din trei cifre date x, y, z, diferite între ele. Să se determine x, y, z ştiind că suma tuturor acestor numere este de trei ori mai mare decît numărul de trei cifre egale toate cu x.

230. Să se rezolve inecuaţia

$$\frac{1}{2(x-1)} - \frac{4}{x} + \frac{15}{2(x+1)} \geqslant 1.$$

231. Să se demonstreze că, dacă α, β şi γ sînt mărimile unghiurilor unui triunghi oarecare, are loc identitatea

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = 1.$$

232. Să se construiască un triunghi asemenea cu un triunghi dat, astfel ca unul din vîrfurile sale să fie într-un punct dat, iar celelalte două vîrfuri să se afle pe o dreaptă dată, respectiv pe un cerc dat.

233. Să se arate că dacă un tetraedru regulat este secţionat cu un plan paralel cu două muchii opuse, atunci:

a) secţiunea este un dreptunghi,

b) perimetrul secţiunii nu depinde de poziţia planului de secţiune luat în condiţiile menţionate.

PROBLEME ALE OLIMPIADELOR DIN CEHOSLOVACIA

234. Se dă un triunghi dreptunghic isoscel APQ avînd ipotenuza AP. Să se construiască pătratul $ABCD$ astfel încît dreptele BC şi CD să treacă prin punctele P, respectiv Q. Să se exprime lungimea laturii pătratului $ABCD$ cu ajutorul lungimii a a catetei triunghiului dat.

235. Să se determine toate numerele naturale n astfel încît $2^n - 1$ să fie putere a unui număr natural (exponentul acestei puteri este un număr natural mai mare decît 1).

236. Se dă triunghiul dreptunghic ABC ale cărui catete CB și CA verifică inegalitatea $CB < CA$. Să se găsească locul geometric al punctelor X situate în interiorul sau pe laturile triunghiului ABC astfel încît să fie îndeplinite condițiile:

$$XA \geqslant XB \geqslant XC \text{ și } x_1 \geqslant x_2 \geqslant x_3.$$

Prin x_1, x_2 și x_3 au fost notate distanțele de la punctul X la laturile BC, CA, respectiv AB ale triunghiului ABC.

237. Cercurile k_1 și k_2 au aceeași rază și se intersectează în punctele P și Q care nu se confundă. Prin punctul P se duce o dreaptă care intersectează ambele cercuri în punctele X, respectiv Y, situate de o parte și de cealaltă a punctului P.

a) Să se găsească locul geometric al mijloacelor laturilor triunghiului QXY.

b) Să se determine figura descrisă de centrele cercurilor circumscrise triunghiului QXY.

238. Să se construiască graficul funcției $f: [-2, 2] \to R$,

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(|1 + \sqrt{4 - x^2}| + |1 - \sqrt{4 - x^2}|\right)$$

și să se demonstreze că acesta este format din două segmente de dreaptă și dintr-un segment de cerc.

239. Se dă trapezul $ABCD$ avînd baza AB. Să se construiască punctele P și Q situate în interiorul segmentului AD, respectiv BC, astfel ca $PQ \parallel AB$ și $AQ \parallel PC$. Să se exprime lungimile lui AP și BQ prin lungimile laturilor trapezului dat.

240. Să se calculeze suma

$$\frac{\sin 1}{\cos 0 \ \cos 1} + \frac{\sin 1}{\cos 1 \ \cos 2} + \frac{\sin 1}{\cos 2 \ \cos 3} + \ldots + \frac{\sin 1}{\cos (n-1) \ \cos n},$$

știind că n este număr întreg pozitiv.

241. Să se demonstreze că în cazul în care între muchiile tetraedrului $ABCD$ există relația

$$AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2,$$

cel puțin una din fețele tetraedrului este triunghi ascuțitunghic.

242. Se dau numerele pozitive $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n \geq 2)$. Să se găsească toate soluţiile reale ale sistemului de ecuaţii

$$\begin{cases} x_1 x_2 = a_1, \\ x_2 x_3 = a_2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x_{n-1} x_n = a_{n-1}, \\ x_n x_1 = a_n. \end{cases}$$

243. Să se găsească toate tripletele de numere prime a, b, c, care satisfac inegalitatea

$$abc < ab + bc + ca.$$

244. Într-o piramidă patrulateră lungimea unei muchii laterale este x, iar lungimile celorlalte muchii sînt egale cu 1.

a) Să se exprime volumul piramidei în funcţie de x.

b) Să se determine valoarea lui x pentru care volumul piramidei este maxim.

PROBLEME ALE OLIMPIADELOR DIN R.D.G.

245. Să se demonstreze că triunghiul ale cărui unghiuri au mărimile α, β şi γ este dreptunghic dacă şi numai dacă are loc relaţia

$$\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = -1.$$

246. Să se demonstreze că $n^3 + 3n^2 - n - 3$ se divide la 48, oricare ar fi numărul natural impar n.

247. Să se stabilească, fără a calcula radicalii, care dintre numerele $z_1 = \sqrt{7} + \sqrt{10}$ şi $z_2 = \sqrt{3} + \sqrt{19}$ este mai mare.

248. Să se reconstituie calculul de mai jos ştiind că fiecare literă sau punct reprezintă cifre de la 0 la 9 $(A \neq 0)$, iar literele diferite reprezintă cifre diferite.

```
      ATOM × ATOM
      -----------
      . . . . .
        . . . . .
          . . . . .
            . . . . .
      -----------------
      . . . . ATOM
```

249. a) Să se demonstreze că restul împărţirii unui număr prim la 30 este sau 1 sau un număr prim.

b) Să se verifice valabilitatea acestei afirmaţii pentru cazul cînd se împarte un număr prim la 60.

250. Să se demonstreze că, dacă cel puţin unul din numerele reale a, b, c este diferit de zero, are loc inegalitatea

$$\frac{a^2}{b^2+c^2}+\frac{b^2}{c^2+a^2}+\frac{c^2}{a^2+b^2}\geqslant\frac{3}{2}.$$

Care este cazul cînd are loc egalitatea?

251. Se dă un tetraedru oarecare avînd feţele triunghiuri echivalente. Să se demonstreze că în acest caz centrele sferelor înscrise şi circumscrise tetraedrului coincid.

252. Să se determine toate numerele reale a pentru care ecuaţia

$$\sin^6 x+\cos^6 x=a(\sin^4 x+\cos^4 x)$$

are cel puţin o soluţie reală. Să se găsească toate soluţiile ecuaţiei în cazul cînd $a=\frac{5}{6}$.

253. O mulţime M se numeşte semigrup dacă în această mulţime este definită o operaţie care asociază în mod unic fiecărei perechi ordonate (u, v) de elemente din M un element w din M (se scrie $u\circ v=w$) şi dacă această operaţie este asociativă, adică pentru oricare trei elemente din M are loc egalitatea $(u\circ v)\circ w=u\circ(v\circ w)$.

Fie c un număr real pozitiv iar M mulţimea tuturor numerelor nenegative mai mici decît c. Pentru orice pereche de numere din M se defineşte următoarea operaţie: $u\circ v=\dfrac{u+v}{1+\dfrac{uv}{c^2}}$.

a) Să se demonstreze că M este semigrup faţă de această operaţie.

b) Să se cerceteze dacă M este un semigrup regulat, adică dacă din $u\circ v_1=u\circ v_2$ rezultă totdeauna $v_1=v_2$, iar din $u_1\circ v=u_2\circ v$ rezultă totdeauna $u_1=u_2$.

254. Trei secţii W_1, W_2 şi W_3 ale unei uzine şi o staţie de cale ferată sînt situate pe un teren plan. Punctele W_1, W_2 şi W_3 nu aparţin aceleiaşi drepte şi sînt unite prin drumuri rectilinii date de segmentele W_1W_2, W_2W_3 şi W_3W_1. Staţia de cale ferată este aşezată în interiorul triunghiului $W_1W_2W_3$, la distanţă egală de cele trei dru-

muri, fiind legată de cele trei secții prin drumuri rectilinii date de segmentele BW_1, BW_2 și BW_3. Se știe că $W_2W_3 < W_3W_1 < W_1W_2$.

Să se stabilească cel mai scurt itinerar al unui autobuz care trebuie să plece de la stație la cele trei secții, iar apoi să se întoarcă din nou la stație, folosind tot timpul numai drumurile care au fost arătate mai înainte.

255. Pentru aproximarea rădăcinii pătrate a unui număr se folosește frecvent formula $\sqrt{a^2 + b} \approx a + \frac{b}{2a}$, a și b fiind numere reale pozitive.

a) Să se demonstreze că eroarea $\delta = a + \frac{b}{2a} - \sqrt{a^2 + b}$ făcută în această aproximare satisface inegalitatea $0 < \delta < \frac{b^2}{8a^3}$.

b) Să se deducă o formulă analoagă de aproximare pentru $\sqrt[3]{a^3 + b}$ și să se evalueze eroarea.

În aplicațiile practice se alege b relativ mic. Cum se găsește o evaluare mai simplă, dacă a^3 și b sînt numere întregi care satisfac inegalitatea $a^3 < a^3 + b < (a + 1)^3$?

c) Să se aproximeze cu ajutorul formulelor de mai sus numerele $\sqrt{56}$ și $\sqrt[3]{80}$.

256. Se dă o sferă de lemn, un compas care poate fi folosit și în plan și pe sferă, un creion, o riglă (fără gradații) și o coală (plană) de hîrtie. Să se traseze pe coala de hîrtie un segment de lungimea razei sferei.

PROBLEME ALE OLIMPIADELOR DIN IUGOSLAVIA

257. Se dă tetraedrul $OABC$, în care $\sphericalangle AOB = \sphericalangle BOC = \sphericalangle COA = 90°$.

a) Să se demonstreze că vîrful O al tetraedrului, centrul de greutate T al feței ABC și centrul S al sferei circumscrise tetraedrului sînt situate pe o aceeași dreaptă.

b) Să se demonstreze că mărimile ctg α, ctg β, ctg γ sînt proporționale respectiv cu a^2, b^2 și c^2. S-a făcut notațiile $\alpha = \sphericalangle CAB$, $\beta = \sphericalangle ABC$, $\gamma = \sphericalangle BCA$ și $a = OA$, $b = OB$, $c = OC$.

258. Latura bazei unei prisme patrulatere regulate este $2a$, iar înălțimea sa este $a(1 + \sqrt{3})$. Se consideră sfera care trece prin

vîrfurile uneia din bazele prismei și este tangentă la cealaltă bază a prismei. Să se găsească aria porțiunii de prismă aflată în interiorul sferei.

259. În fața unui înțelept miop, la o distanță de d m, este situat un obiect. Înțeleptul vede numai obiectele așezate la o distanță mai mică de 1 m față de el. El a pus pariu că poate găsi obiectul făcînd mai puțin decît $\frac{3}{2}d + 7$ pași, cu condiția ca, după fiecare pas al său (lung de 1 m), să i se spună „apropie-te”, sau „nu te apropia”. Obiectul se consideră găsit dacă înțeleptul a ajuns la o distanță mai mică de 1 m față de acesta, adică atunci cînd îl poate vedea. Să se demonstreze că înțeleptul poate cîștiga pariul.

PROBLEME ALE OLIMPIADELOR DIN POLONIA

260. Se dau punctele A, B și cercul K. Să se construiască un cerc, care să treacă prin punctele A și B și să aibă în comun cu cercul dat K o coardă de lungime dată q.

261. Să se găsească numărul x format din trei cifre, astfel ca numărul scris cu aceleași cifre ca x, însă într-o bază diferită de 10 să fie de două ori mai mare decît x.

262. Să se demonstreze că, dacă $n \in N$ și $n \geqslant 3$, are loc inegalitatea

$$\sqrt[n+1]{n+1} \leqslant \sqrt[n]{n}.$$

263. În punctul A al cercului k se duce perpendiculara AB pe planul cercului. Să se găsească locul geometric al proiecțiilor punctului A pe dreptele BM, unde M este un punct oarecare al cercului k.

264. În patrulaterul convex $ABCD$ suma $AB + BD$ nu depășește suma $AC + CD$. Să se demonstreze că în acest caz lungimea laturii AB este mai mică decît lungimea diagonalei AC.

PROBLEME ALE OLIMPIADELOR DIN ROMÂNIA

265. Să se demonstreze că ecuația $x^4 - 6x^2 + 1 = 0$ are rădăcinile

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{8},\ \operatorname{tg}\frac{3\pi}{8},\ \operatorname{tg}\frac{5\pi}{8} \text{ și } \operatorname{tg}\frac{7\pi}{8}.$$

266. Să se rezolve sistemul de ecuații

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \ldots + nx_n = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 + 6x_3 + \ldots + 2nx_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ kx_1 + 2kx_2 + 3kx_3 + \ldots + (1 + k^2)x_k + \ldots + nkx_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ nx_1 + 2nx_2 + 3nx_3 + \ldots + (1 + n^2)x_n = 0. \end{cases}$$

267. Să se demonstreze că inegalitatea

$$\left(\frac{x^2 \sin y - 2x + \sin y}{x^2 - 2x \sin y + 1}\right)^2 \leqslant 1$$

este adevărată pentru orice numere reale x, y, care nu anulează numitorul membrului întîi.

268. Să se găsească rădăcinile reale ale ecuației

$$\sqrt{x^4 - 18x^2 + 81} - 2\sqrt{x^4 - 2x^2 + 1} + \sqrt{x^2} + x + 7 = 0.$$

269. Trei echipe de pescari au prins 113 pești. Fiecărui pescar din prima echipă i-au revenit 13 pești, fiecăruia din cea de-a doua echipă 5 pești și fiecăruia din ultima echipă 4 pești. Se cere numărul de pescări din fiecare echipă, știind că în total sînt 16 pescari.

270. Două cercuri C_1 și C_2 sînt secante în A și B. Fie C un punct fix pe prelungirea lui BA. Prin B se duce o secantă mobilă care taie cercul C_1 în punctul M și cercul C_2 în punctul N. Dreptele CM și CN taie a doua oară cercurile C_1 și C_2 în punctele Q, respectiv P.

a) Să se arate că patrulaterul $MNPQ$ este inscriptibil.

b) Să se găsească locul geometric al intersecției mediatoarelor segmentelor AP și AQ.

c) Să se determine poziția lui MN astfel încît raza cercului circumscris triunghiului AMN să fie maximă.

271. Se dă polinomul $P(x)$ cu coeficienți complecși

$$P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + (-1)^n$$

ale cărui rădăcini au același modul. Să se arate că $P(-1)$ este număr real.

272. Fie n numere reale $x_i\,(i = 1, 2, \ldots, n)$ care verifică relațiile

$$a(1 + x_i) \geqslant (a + 1)\, x_{i+1} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

$$x_{n+1} = x_1, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i \geqslant na,$$

a fiind un număr real diferit de $-1, 0, -\dfrac{1}{2}$. Să se arate că numerele x_i sînt egale între ele.

273. Să se arate că ecuația

$$\sqrt{a + bx} + \sqrt{b + cx} + \sqrt{c + ax} = \sqrt{b - ax} + \sqrt{c - bx} + \sqrt{a - cx}$$

$(a > 0,\ b > 0,\ c > 0)$ nu are altă rădăcină în afară de $x = 0$.

274. Pe arcul BC, căruia nu îi aparține punctul A, al cercului circumscris triunghiului dreptunghic ABC, cu unghiul drept în A, se consideră un punct M. Fie P, respectiv Q simetricul punctului M față de dreapta AB, respectiv AC.

a) Să se arate că punctele P, A, Q sînt coliniare.

b) Să se determine poziția punctului M, astfel încît lungimea segmentului PQ să fie maximă.

c) Să se arate că dacă dreapta PQ este tangentă la cerc în A, atunci punctul M este simetricul lui A față de dreapta BC și, reciproc, dacă punctul M este simetricul lui A față de dreapta BC, atunci dreapta PQ este tangentă la cerc în punctul A.

d) Să se arate că dacă patrulaterul $BMQP$ este inscriptibil, atunci $AM = BM$ și, reciproc, dacă $AM = BM$, patrulaterul $BMQP$ este inscriptibil.

275. Fie x_1 și x_2 rădăcinile reale ale ecuației $2x^2 + 2mx + (m + 1)^2 = 0$, m fiind un parametru real.

a) Să se stabilească mulțimile de valori pe care le pot lua fiecare din expresiile: $S_1 = x_1 + x_2$, $P = x_1 x_2$, $S_2 = x_1^2 + x_2^2$.

b) Să se afle valorile extreme care pot fi luate de rădăcinile x_1 și x_2.

c) Să se rezolve ecuația în fiecare din cazurile particulare: 1) $x_1 x_2 = 2$; 2) $x_1 = 2x_2$; 3) $x_1 - x_2 = 1{,}4$.

d) Dacă n este număr natural, expresia $E_n = (3 + 5)^n + (3 - 5)^n$ se divide cu 2^n, iar E_{2n+1} se divide și cu 3.

276. Se dau n numere reale care satisfac inegalitățile: $x_1 \geqslant \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_n \geqslant 0$. Să se arate că aceste numere satisfac inegalitatea

$$\frac{(x_3 + x_4 + \ldots + x_n)(x_1 - x_2)}{x_1 + x_2} + \frac{(x_1 + x_4 + \ldots + x_n)(x_2 - x_3)}{x_2 + x_3} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1})(x_{n-1} - x_n)}{x_{n-1} + x_n} + \frac{(x_2 + x_3 + \ldots + x_{n-1})(x_n - x_1)}{x_n + x_1} \geqslant 0.$$

PROBLEME ALE OLIMPIADELOR DIN SUEDIA

277. Dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n$ este o permutare a numerelor $1, 2, \ldots, n$, să se demonstreze că dacă n este un număr impar, rezultă că produsul $(a_1 - 1)(a_2 - 2)(a_3 - 3)\ldots(a_n - n)$ este un număr par.

278. Să se determine polinomul $P(x)$ cu coeficienți întregi, astfel încît să se anuleze pentru $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ și pentru $x = \sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$.

279. Să se arate că, oricare ar fi numărul real $x \geqslant \frac{1}{2}$, se poate găsi un număr întreg n astfel încît $|x - n^2| \leqslant \sqrt{x - \frac{1}{4}}$.

PROBLEME ALE OLIMPIADELOR DIN S.U.A.

Prima olimpiadă

280. Prin $(a, b, \ldots, g)$ și $[a, b, \ldots, g]$ se notează cel mai mare divizor comun și respectiv cel mai mic multiplu comun al numerelor întregi pozitive $a, b, \ldots, g$. Să se arate că

$$\frac{[a, b, c]^2}{[a, b][b, c][c, a]} = \frac{(a, b, c)^2}{(a, b)\,(b, c)(c, a)}.$$

281. Se dă tetraedrul isoscel $ABCD$, adică $AB = CD$, $AC = BD$, $AD = BC$. Să se demonstreze că toate fețele tetraedrului $ABCD$ sînt triunghiuri ascuțitunghice.

282. Se alege la întîmplare unul din numerele 1, 2,...,9. Obținerea oricăruia din acestea este egal posibilă. Să se găsească probabilitatea ca atunci, cînd se aleg succesiv n numere, produsul acestora să fie multiplu de 10.

283. Fie r un număr rațional nenegativ. Să se găsească numerele întregi a, b, c, d, e, f, astfel ca, oricare ar fi r, să fie adevărată inegalitatea

$$\left|\frac{ar^2 + br + c}{dr^2 + er + f} - \sqrt[3]{2}\right| < |r - \sqrt[3]{2}|.$$

284. Pentagonul convex $ABCDE$ are proprietatea că aria fiecăruia din triunghiurile BCD, CDE, DEA și EAB este egală cu 1. Să se demonstreze că toate pentagoanele care au această proprietate au arii egale și că există infinit de multe pentagoane cu această proprietate, distincte între ele.

A doua olimpiadă

285. Punctele P și Q se găsesc în interiorul tetraedrului $ABCD$. Să se demonstreze că $\sphericalangle PAQ < 60°$.

286. Fie șirurile de numere întregi $\{x_n\}$ și $\{y_n\}$ definite prin recurență:

$$x_0 = 1,\ x_1 = 1,\ x_{n+1} = x_n + 2x_{n-1},$$
$$y_0 = 1,\ y_1 = 7,\ y_{n+1} = 2y_n + 3y_{n-1}, \qquad n \in N.$$

Să se demonstreze că singura valoare comună a termenilor de același rang din cele două șiruri este 1.

287. Se aleg arbitrar trei vîrfuri ale unui poligon regulat cu $2n + 1$ laturi. Considerînd toate alegerile de acest fel ca egal posibile, să se găsească probabilitatea ca centrul poligonului să fie situat în interiorul triunghiului format de cele trei puncte astfel alese.

288. Să se găsească toate rădăcinile reale sau complexe ale sistemului

$$\begin{cases} x + y + z = 3, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3, \\ x^5 + y^5 + z^5 = 3. \end{cases}$$

289. Să se demonstreze că rădăcinile cubice a trei numere prime diferite nu pot constitui trei termeni (nu neapărat consecutivi) ai unei progresii aritmetice.

290. Fie a, b, c trei numere întregi diferite între ele, iar P un polinom cu coeficienţi întregi. Să se arate că nu pot fi îndeplinite simultan egalităţile $P(a) = b$, $P(b) = c$ şi $P(c) = a$.

291. Să se demonstreze că, oricare ar fi numerele reale pozitive a, b, c, este adevărată inegalitatea

$$a^a b^b c^c \geqslant (abc)^{\frac{a+b+c}{3}}.$$

292. Două puncte situate pe o sferă de rază 1 se unesc cu un arc de cerc de lungime mai mică decît 2 şi situat în interiorul sferei. Să se arate că acest arc de cerc se află în întregime în una din emisfere.

293. Tatăl, mama şi cu fiul au organizat un concurs în familie, la fiecare joc participînd doi adversari. Deoarece tatăl este cel mai slab jucător, i se dă posibilitatea de a stabili prima pereche de jucători. Învingătorul în primul joc întîlneşte în continuare jucătorul care a asistat la partida precedentă ş.a.m.d. Concursul este cîştigat de jucătorul care a luat două partide. Deoarece fiul este jucătorul cel mai bun, se intuieşte că tatăl îşi va mări şansele formînd prima pereche de jucători din el însuşi şi soţia sa. Să se arate că, într-adevăr aceasta este cea mai bună strategie a sa. Se presupune că în timpul concursului nu se modifică probabilitatea cu care un jucător cîştigă în faţa altuia.

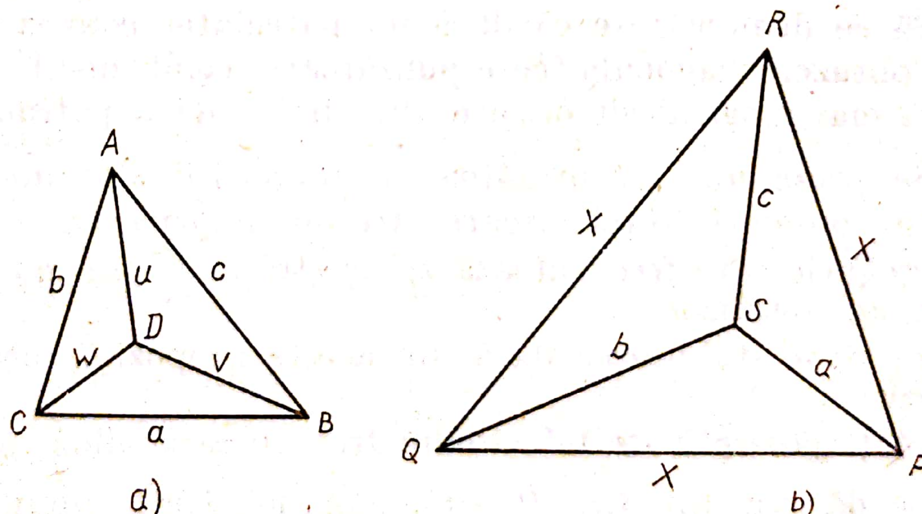


Fig. 1

294. Se dau triunghiurile PQR şi ABC (fig. 1). În $\Delta\, ABC$, $\sphericalangle ADB = \sphericalangle BDC = \sphericalangle CDA = 120°$. Să se arate că $x = u + v + w$.

295. Într-un triunghi ascuţitunghic este înscris un pătrat, astfel încît două vîrfuri ale sale sînt situate pe una din laturile triunghiului, iar celelalte două vîrfuri sînt fiecare situate pe laturile care au rămas. Să se demonstreze că centrul cercului înscris în triunghi se află în interiorul acestui pătrat.

296. La o olimpiadă matematică au fost date spre rezolvare cinci probleme. Printre concurenţi nu se află doi care să fi rezolvat aceleaşi probleme. Dacă se lasă la o parte una din probleme, se poate găsi pentru oricare din concurenţi un alt concurent care a rezolvat aceleaşi probleme ca şi acesta, din cele patru probleme care au rămas. Se cere numărul participanţilor la olimpiadă.

297. Să se demonstreze că ortocentrul unui triunghi se află mai aproape de acea latură a triunghiului, dintre două laturi date, care are lungimea mai mică.

298. Să se determine numerele a, b, c, astfel ca să fie adevărată identitatea

$$x^3 - ax^2 + bx - c \equiv (x - a)(x - b)(x - c).$$

299. Să se pună sub formă de produs expresia

$$[(a - c)^2 + (b - d)^2](a^2 + b^2) - (ad - bc)^2.$$

300. Să se demonstreze că dacă un patrulater convex are trei unghiuri obtuze, diagonala corespunzătoare celui de-al patrulea unghi este mai lungă decît oricare altă diagonală a patrulaterului.

301. Se presupune că următoarele propoziţii sînt adevărate:

a) există posesori de televizoare care nu sînt zugravi;

b) persoanele care frecventează zilnic ştrandul, însă nu sînt zugravi, nu au televizor.

Se cere să se stabilească dacă din aceste propoziţii rezultă sau nu propoziţia:

c) nu toţi posesorii de televizoare frecventează zilnic ştrandul.

302. Se dă punctul fix P situat în interiorul unui cerc şi punctul Q mobil pe acest cerc. Diametrul perpendicular pe PQ intersectează în punctul M tangenta în Q la cerc. Să se găsească locul geometric descris de punctul M, cînd punctul Q parcurge cercul.

303. Să se determine numerele reale a, b, c, pentru care

$$|f(x)| = |ax^2 + bx + c| \leqslant 1,$$

în condițiile $|x| \leqslant 1$, iar valoarea expresiei $\frac{8}{3}a^2 + 2b^2$ este maximă.

304. Să se determine numerele nenegative k și l astfel ca valoarea expresiei

$$\frac{k}{k+l} + \frac{n-k}{n-(k+l)}, \qquad n \in N,$$

să fie maximă.

305. Fie x_1 un număr pozitiv, mai mic decît 1. Se formează prin recurență șirul $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, conform cu relația $x_{k+1} = x_k - x_k^2$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Să se demonstreze că, oricare ar fi n, inegalitatea

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 < 1$$

este adevărată.

306. Fie patrulaterul plan $ABCD$. Punctul A_1 este simetricul punctului A față de B, punctul B_1 este simetricul punctului B față de C, punctul C_1 este simetricul punctului C față de D, iar punctul D_1 este simetricul punctului D față de A. Să se construiască patrulaterul $ABCD$ dacă se cunosc punctele A_1, B_1, C_1, D_1.

PROBLEME DATE LA OLIMPIADELE DIN U.R.S.S.

Probleme date la etapa finală a celei de-a patra olimpiade matematice din R.S.F.S.R.

307. Să se găsească mărimile unghiurilor unui triunghi, știind că două din înălțimile sale nu sînt mai mici decît laturile corespunzătoare lor.

308. Să se demonstreze că oricare ar fi numărul natural m, $m(m+1)$ nu este putere a unui număr întreg (exponentul fiind mai mare ca 1).

309. Se calculează suma cifrelor pentru fiecare din numerele de la 1 la un miliard. Pentru fiecare număr din cele un miliard obținute se calculează din nou suma cifrelor, repetîndu-se aceste operații pînă cînd se obțin un miliard de numere formate din cîte

o singură cifră. Să se arate care din numerele 1 și 2 se repetă de mai multe ori în mulțimea de numere astfel obținută.

310. Hexagonul convex $ABCDEF$ are toate unghiurile egale.

a) Să se demonstreze că $AB - DE = FE - BC = DC - FA$.

b) Să se demonstreze propoziția reciprocă: fiind date șase segmente de lungimi $a_1, a_2, \ldots, a_6$ astfel ca $a_1 - a_4 = a_5 - a_2 = a_3 - a_6$, se poate construi un hexagon convex cu unghiuri egale și avînd aceste segmente drept laturi.

311. Să se găsească toate soluțiile întregi ale ecuației

$$\underbrace{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\ldots+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}}}_{1964} = y.$$

312. Prin vîrfurile unui patrulater convex oarecare se duc perpendicularele pe diagonalele sale. Să se demonstreze că picioarele acestor perpendiculare formează un patrulater asemenea cu cel dat.

313. Să se găsească toate numerele naturale impare n, astfel ca $(n-1)!$ să nu se dividă cu n^2.

314. Fie O centrul cercului inscris în patrulaterul $ABCD$. Să se demonstreze că $\sphericalangle AOB + \sphericalangle COD = 180°$.

315. Fie numerele naturale a, b și n. Se știe că pentru orice număr natural k ($k \neq b$), $k^n - a$ se divide la $k - b$. Să se demonstreze că $a = b^n$.

316. Să se găsească cel mai mare pătrat perfect cu proprietatea că prin ștergerea ultimelor două cifre ale sale rămîne tot un pătrat perfect. Se presupune că cel puțin una din cele două cifre care se șterg nu este zero.

317. Se consideră o acoperire a planului cu ajutorul unei rețele de hexagoane regulate de latură 1. Un gîndac se mișcă pe liniile rețelei între punctele A și B, după drumul cel mai scurt, a cărui lungime este 100 m. Să se demonstreze că jumătate din drumul său este parcurs în același sens.

318. În expresia $x_1 : x_2 : \ldots : x_n$, pentru a indica ordinea efectuării operațiilor, se așază paranteze, punîndu-se expresia sub forma unei fracții $\dfrac{x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k}}{x_{j_1} x_{j_2} \ldots x_{j_{n-k}}}$; de exemplu $[x_1 : (x_2 : x_3)] : x_4 = \dfrac{x_1 x_3}{x_2 x_4}$ sau $[(x_1 : x_2) : x_3] : x_4 = \dfrac{x_1}{x_2 x_3 x_4}$.

Se cere să se determine numărul de astfel de fracții obținute die expresia $x_1 : x_2 : \ldots : x_n$ așezînd parantezele în toate modurile posibile.

319. Să se găsească numărul minim de tetraedre în care poate fi descompus un cub.

320. Se consideră mulțimea formată din n numere întregi distincte două cîte două: $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ($n > 2$). Din această mulțime se obține o altă mulțime de n numere: $\frac{a_1+a_2}{2}, \frac{a_2+a_3}{2}, \ldots, \frac{a_{n-1}+a_n}{2}, \frac{a_n+a_1}{2}$.

Să se demonstreze că, dacă se continuă aplicarea procedeului de un număr finit de ori, se obține o mulțime care nu mai este compusă numai din numere întregi.

321. Fie $ABCD$ trapezul circumscris unui cerc, E punctul de intersecție al diagonalelor sale și r_1, r_2, r_3, r_4 razele cercurilor înscrise respectiv în triunghiurile BAE, BCE, CDE și DAE. Să se arate că

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3} = \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_4}.$$

Probleme date la cea de-a șaptea olimpiadă unională

322. La un proces instanței îi sînt prezentate, drept probe materiale, 14 monede. La dispoziția expertului tribunalului se află numai o balanță fără greutăți.

a) Să se arate cum poate demonstra expertul instanței că primele șapte monede sînt false, numai prin trei cîntăriri, știind că monedele false au aceeași greutate și cele veritabile sînt egale ca greutate, cele false fiind mai ușoare.

b) Să se arate că, în aceleași condiții, expertul poate demonstra mai mult și anume că restul de monede sînt veritabile.

323. În componența unui număr de nouă cifre intră toate cifrele, în afară de zero. Știind că numărul se termină în cifra 5, să se arate că acesta nu poate fi pătrat perfect.

324. Să se demonstreze că n puncte ($n > 4$) pot fi unite prin săgeți, astfel încît să se poată ajunge dintr-un punct în altul urmînd una sau două săgeți (oricare pereche de puncte poate fi unită printr-o singură săgeată; deplasarea în sens contrar săgeții este interzisă).

325. Pe laturile triunghiului ascuțitunghic ABC se construiesc, în afara acestuia, trei triunghiuri ascuțitunghice asemenea între

ele AC_1B, BA_1C şi CB_1A ($\sphericalangle ABC_1 = \sphericalangle ABC_1 = \sphericalangle A_1BC$, $\sphericalangle BCA_1 = \sphericalangle B_1CA$, $\sphericalangle CAB_1 = \sphericalangle C_1AB$).

a) Să se demonstreze că cercurile circumscrise triunghiurilor AC_1B, BA_1C şi CB_1A se intersectează într-un punct

b) Să se demonstreze că dreptele AA_1, BB_1 şi CC_1 se intersectează în acel punct.

326. Să se arate că, oricare ar fi N, se poate face cunoştinţă la N persoane care nu se cunosc între ele, astfel ca oricare trei să nu aibă acelaşi număr de cunoscuţi.

327. Într-o partidă de şah regele a parcurs tabla de şah de 8×8 pătrăţele ocupînd fiecare cîmp o singură dată şi revenind prin ultima mutare la poziţia iniţială (regele se deplasează după regulile obişnuite). Unind centrele cîmpurilor ocupate succesiv de rege, se obţine o linie poligonală fără autointersecţii. Care este cel mai lung şi care este cel mai scurt drum pe care îl poate parcurge regele astfel?

328. Fie un unghi cu vîrful în O şi un cerc tangent la laturile sale în punctele A şi B. Semidreapta dusă din A paralelă la OB intersectează acest cerc în punctul C. Segmentul OC intersectează cercul în punctul E, iar dreptele AE şi OB se intersectează în punctul K. Să se demonstreze că $OK = KB$.

329. Se dau numerele reale a, b, c, astfel încît pentru toate valorile lui x care satisfac condiţia $-1 \leqslant x \leqslant 1$ este îndeplinită egalitatea

$$|ax^2 + bx + c| \leqslant 1.$$

Să se demonstreze că pentru aceste valori ale lui a, b, c este adevărată şi inegalitatea

$$|cx^2 + bx + a| \leqslant 2.$$

330. O federaţie de tenis a acordat tuturor jucătorilor săi calificative: celui mai bun calificativul 1, următorului calificativul 2 ş.a.m.d. Se ştie că în întîlnirile dintre jucători ale căror calificative diferă mai mult decît două puncte, învinge întotdeauna jucătorul cu calificativul mai mic. Un concurs la care participă cei mai buni 1024 jucători se desfăşoară după sistemul olimpic: concurenţii sînt împărţiţi prin tragere la sorţi în perechi şi după desfăşurarea primei etape este promovat învingătorul din fiecare pereche, astfel încît după fiecare etapă numărul concurenţilor se reduce la jumătate. În acest mod, după cea de-a zecea etapă este desemnat cîştigătorul concursului. Se cere calificativul maxim al acestuia.

331. Un triunghi are laturile de lungime a, b, c $(a \geqslant b \geqslant c)$ şi aria 1. Să se arate că $b \geqslant \sqrt{2}$.

332. Se dă un punct în interiorul unui poligon convex cu n laturi neparalele două cîte două. Să se arate că prin acest punct nu trec mai mult de n drepte care să împartă fiecare poligonul în două părţi de arii egale.

333. Fie trinomul de gradul al doilea $f(x) = ax^2 + bx + c$, astfel ca ecuaţia $f(x) = x$ să nu aibă rădăcini reale. Să se demonstreze că nici ecuaţia $f[f(x)] = x$ nu are în acest caz rădăcini reale.

334. Pe o coală de hîrtie infinită, împărţită în carouri, n carouri sînt înnegrite. La momentele $t = 1, 2, \ldots$ carourile se recolorează simultan după următoarea regulă: fiecare carou K ia culoarea pe care o aveau în momentul precedent majoritatea din o mulţime de carouri în care intră însuşi caroul K şi carourile cu care se învecinează sus şi jos.

a) Să se demonstreze că într-un interval finit de timp pe coala de hîrtie nu mai rămîn carouri negre.

b) Să se demonstreze că aceste carouri negre nu dispar mai tîrziu de momentul $t = n$.

335. Să se demonstreze că dacă x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 sînt numere pozitive, este satisfăcută inegalitatea

$$(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)^2 \geqslant 4(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5 + x_5x_1).$$

336. Se dau în spaţiu n puncte care nu sînt situate în acelaşi plan. Cîte paralelipipede distincte se pot forma, avînd vîrfurile în mulţimea de puncte dată?

3

REZOLVĂRI

REZOLVĂRILE PROBLEMELOR OLIMPIADELOR INTERNAȚIONALE DE MATEMATICĂ

1. Fie $d \geqslant 1$ cel mai mare divizor comun al numărătorului și numitorului pentru n oarecare. Atunci $21n + 4 = sd$; $14n + 3 = td$, de unde, eliminînd pe n, se obține $(3t - 2s)d = 1$. Deoarece numărul $3t - 2s$ este întreg, iar $0 < \frac{1}{d} = 3t - 2s$, se deduce că $d = 1$.

Altă metodă de rezolvare. Se folosește algoritmul lui Euclid

$$\begin{array}{r|l} 21n + 4 & 14n + 3 \\ \cline{2-2} -14n - 3 & \quad 1 \\ \hline 7n + 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 14n + 3 & 7n + 1 \\ \cline{2-2} -14n - 2 & \quad 2 \\ \hline 1 & \end{array}$$

Numărătorul și numitorul au pe 1 ca cel mai mare divizor comun, oricare ar fi valoarea naturală atribuită lui n, adică sînt numere prime între ele, și, în consecință, fracția va fi ireductibilă.

2. Este necesar ca expresiile aflate sub radical să nu fie negative. Vom considera numai valorile lui x pentru care $x \geqslant \frac{1}{2}$, astfel ca $2x - 1 \geqslant 0$. Aceste valori ne asigură că și expresiile aflate sub ceilalți radicali nu sînt negative. Aceasta este evident pentru expresia $x + \sqrt{2x - 1}$. Din faptul că trinomul de gradul al doilea

$$(x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1 \geqslant 0$$

rezultă că $x^2 \geqslant 2x - 1$ şi de aceea $x \geqslant \sqrt{2x-1}$, deci

$$x - \sqrt{2x-1} \geqslant 0, \text{ cu condiţia } x \geqslant \frac{1}{2}.$$

Prin transformări succesive se obţine

$$\sqrt{x+\sqrt{2x-1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2x+2\sqrt{2x-1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2x-1+2\sqrt{2x-1}+1} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sqrt{2x-1}+1)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left|\sqrt{2x-1}+1\right|$$

şi, analog,

$$\sqrt{x-\sqrt{2x-1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left|\sqrt{2x-1}-1\right|.$$

Se consideră funcţia $f: \left[\frac{1}{2}, +\infty\right) \to R$, dată de $f(x) = y$, unde

$$y = \sqrt{x+\sqrt{2x-1}} + \sqrt{x-\sqrt{2x-1}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\sqrt{2x-1}+1\right| + \left|\sqrt{2x-1}-1\right|\right).$$

Se descompune domeniul de definiţie al funcţiei f în două intervale:

$$\left[\frac{1}{2}, +\infty\right) = \left[\frac{1}{2}, 1\right) \cup [1, +\infty).$$

Pe primul interval

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[(\sqrt{2x-1}+1) + (-\sqrt{2x-1}+1)\right] = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

Pe al doilea interval

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[(\sqrt{2x-1}+1) + (\sqrt{2x-1}-1)\right] = \sqrt{2}\sqrt{2x-1}.$$

Astfel, s-a demonstrat că

$$y = \sqrt{2} \text{ pentru } \frac{1}{2} \leqslant x < 1;$$

$y = \sqrt{2}\sqrt{2x-1}$ pentru $1 \leqslant x < +\infty$, de unde rezultă că $y \geqslant \sqrt{2}$.

Egalitățile din enunț vor avea loc pentru următoarele valori ale lui x:

a) $y = \sqrt{2}$ are loc pentru $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1$;

b) $y = 1$ nu are loc pentru nici o valoare a lui x, deoarece $y \geqslant \sqrt{2}$;

c) $y = 2$ are loc pentru $x = \frac{3}{2}$, deoarece aceasta este singura soluție a ecuației $\sqrt{2}\sqrt{2x-1} = 2$.

3. Egalitatea dată se transcrie sub forma

$$a \cos^2 x + c = -b \cos x. \qquad (1)$$

Atunci numerele a, b, c și $\cos x$ satisfac relația

$$4a^2 \cos^4 x + (4ac - 2b^2)\, 2 \cos^2 x + 4c^2 = 0, \qquad (2)$$

care se obține din cea dată prin ridicare la pătrat și înmulțire cu 4. Funcția $\cos 2x$ este legată de $\cos x$ prin relația

$$2 \cos^2 x = \cos 2x + 1.$$

Înlocuind expresia (3) în egalitatea (2), se găsește

$$a^2(\cos 2x + 1) + (4\, ac\, {}^2 - 2b^2)(\cos 2x + 1) + 4c^2 = 0.$$

Ordonînd după puterile lui $\cos 2x$, se obține

$$a^2 \cos^2 2x + (2a^2 + 4ac - 2b^2) \cos 2x + (a^2 + 4ac - 2b^2 + 4c^2) = 0,$$

ceea ce constituie relația căutată între a, b, c și $\cos 2x$.

În cazul $a = 4$, $b = 2$, $c = -1$ avem

$$a^2 = 16;\ 2a^2 + 4ac - 2b^2 = 8,$$

$$a^2 + 4ac - 2b^2 + 4c^2 = -4.$$

Se obţine următoarea relaţie în cos $2x$:

$$4\cos^2 2x + 2\cos 2x - 1 = 0,$$

iar relaţia dată iniţial, în cazul cînd $a = 4,\ b = 2,\ c = -1$, este

$$4\cos^2 x + 2\cos x - 1 = 0.$$

Altă metodă de rezolvare. Se notează cu y_1, y_2 rădăcinile ecuaţiei de gradul al doilea $ay^2 + by + c = 0$. Este evident că $y_1 + y_2 = -\frac{b}{a}$; $y_1y_2 = \frac{c}{a}$. Trebuie formată ecuaţia de gradul al doilea cu rădăcinile $z_1 = 2y_1^2 - 1$ şi $z_2 = 2y_2^2 - 1$. Calculăm $-(z_1 + z_2)$ şi z_1z_2:

$$-(z_1 + z_2) = -2(y_1 + y_2)^2 + 4y_1y_2 + 2;$$

$$z_1z_2 = 4y_1^2y_2^2 - 2(y_1 + y_2)^2 + 4y_1y_2 + 1.$$

Se poate lua coeficientul lui z^2 egal cu 1, iar coeficientul lui z şi termenul liber vor fi daţi de expresiile obţinute pentru $-(z_1 + z_2)$ şi z_1z_2, înlocuindu-se în prealabil $y_1 + y_2$ cu $-\frac{b}{a}$, iar y_1y_2 cu $\frac{c}{a}$. Înmulţind membrul drept cu a^2, se obţine relaţia de gradul al doilea care se căuta. Folosind această metodă de rezolvare, este necesar un studiu separat al cazului $a = 0$.

4. Fie ABC triunghiul căutat (fig. 2). Se descrie un cerc de rază $\frac{c}{2}$ avînd centrul în mijlocul O al ipotenuzei $AB = c$. Se ştie că acest cerc va fi circumscris triunghiului ABC. Din vîrful C se duce înălţimea h_c şi se calculează aria triunghiului ABC:

$$S = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} c\, h_c.$$

Prin ipoteză, $AC \cdot CB = CO^2 = \frac{c^2}{4}$, însă $AC \cdot CB = 2S$. Aceasta înseamnă că $c \cdot h_c = \frac{c^2}{4}$ şi, în consecinţă, $h_c = \frac{c}{4}$.

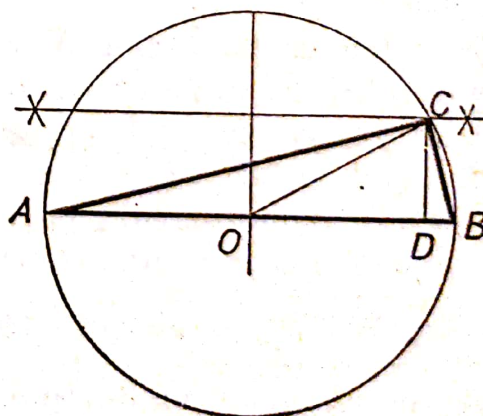


Fig. 2.

Fig. 3

De aceea vîrful C este unul din punctele de intersecţie ale cercului de diametru AB cu o dreaptă paralelă cu AB şi situată la distanţa $\frac{c}{4}$ de aceasta.

5. a) Se demonstrează că dreptele AN şi BN sînt perpendiculare. Într-adevăr, $\sphericalangle ANM = \sphericalangle ACM = 45°$. Cu totul analog, $\sphericalangle BNM = \sphericalangle BEM = 45°$. În consecinţă $\sphericalangle ANB = 90°$ şi dreapta MN este bisectoarea sa (fig. 3).

Se demonstrează că dreapta BC trece prin punctul N. Se uneşte punctul N cu punctul B şi cu punctul C. Unghiul BNA este drept, aşa cum s-a demonstrat. $\sphericalangle CNA$ este de asemenea drept, deoarece se sprijină pe diametrul AC. Prin urmare, $CN \perp NA$ şi $BN \perp NA$, deci punctele B, N şi C se află pe perpendiculara din N pe NA.

Se demonstrează, în continuare, că dreapta AF trece prin punctul N. Se uneşte punctul F cu punctul N, $\sphericalangle FNB = 90°$, fiindcă se sprijină pe diametrul FB. S-a demonstrat însă, că $AN \perp BN$, şi, prin urmare, punctele F şi A sînt situate pe perpendiculara dusă din N pe dreapta NB.

b) Se demonstrează că toate dreptele MN trec printr-un punct fix S atunci cînd M este luat arbitrar pe segmentul AB. Din mijlocul segmentului AB se descrie un cerc de rază $r = \frac{AB}{2}$. Locul geometric al punctelor N va fi un semicerc, deoarece s-a arătat la punctul a) că unghiul ANB este drept, iar MN este bisectoarea sa. Prin urmare, toate dreptele MN trec prin punctul S, care împarte în două arcul AB complementar lui ANB.

c) Se demonstrează că locul geometric al mijloacelor R ale segmentelor PQ care unesc centrele pătratelor va fi un segment de dreaptă VW, paralel cu dreapta AB şi situat la distanţa $h = \frac{AB}{4}$ de aceasta. Ducem din punctele P, Q şi R perpendicularele PP', RR', QQ' pe AB. Atunci patrulaterul $PP'Q'Q$ este un trapez, iar

RR' este linie mijlocie în acest trapez, de aceea $RR' = \frac{PP' + QQ'}{2}$, însă $PP' = \frac{AM}{2}$ şi $QQ' = \frac{MB}{2}$, prin urmare, $RR' = \frac{AM + BM}{4} = \frac{AB}{4}$. Punctul R este situat în acest caz pe dreapta paralelă cu AB şi la distanţa $RR' = \frac{AB}{4}$ de aceasta. Se examinează poziţiile extreme pe care le ocupă punctul R şi anume cazurile cînd punctul M coincide fie cu punctul A, fie cu punctul B. În primul caz punctul R va fi dat de mijlocul V al segmentului PA, iar în a doua situaţie de mijlocul W al segmentului PB (P este centrul pătratului construit pe AB).

6. Fie trapezul $ABCD$ cel căutat (fig. 4), iar dreptele $AB \parallel CD \parallel p$. Astfel, trebuie duse prin punctele A şi C două drepte p' şi q' respectiv, care să fie paralele cu p, iar pe acestea să se găsească punctele B, respectiv D, care să fie vîrfuri ale trapezului isoscel $ABCD$ în care se poate înscrie un cerc. Dacă în trapez se poate înscrie un cerc, înseamnă că $AB + CD = AD + BC = 2AD$. Atunci $AF' = FE$, unde F' este mijlocul segmentului AB, $FF' \perp q'$, iar E este proiecţia lui A pe CD (fig. 5); de aceea $AB = 2AF' = 2EF$ şi $CD = 2CE - 2EF$ şi, prin urmare, $2AD = 2EC$, adică $ED = EC$, rezultînd că punctele D şi D' sînt situate pe cercul de rază EC, avînd centrul în punctul A. Pentru ca problema să poată fi rezolvată, este necesar ca $AD = EC \geqslant F'F$, adică $\frac{AE}{EC} \leqslant 1$, deci $\sphericalangle ACE \leqslant 45°$.

Această condiţie este şi suficientă.

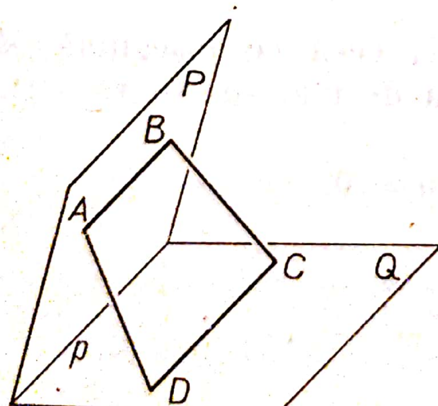


Fig. 4.

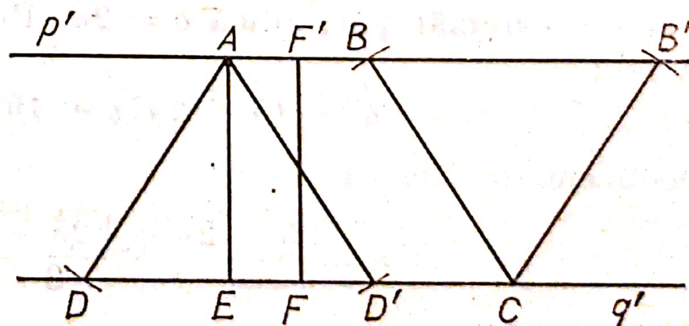


Fig. 5.

De aici rezultă următoarea c o n s t r u c ţ i e. Prin punctul A (fig. 5) se duce perpendiculara AE pe dreapta q', iar din punctul A se descrie un cerc de rază CE, cerc care intersectează dreapta q' în punctele D şi D'. Împărţim segmentul CD în două părţi egale cu ajutorul lui F şi ducem $FF' \perp CD$. Luînd simetricul punctului A faţă de FF', se va găsi punctul B. Se poate găsi o a doua rezolvare, luînd în locul punctului D punctul D'. Problema are două soluţii, dacă $\sphericalangle ACE < 45°$ şi o singură soluţie (caz în care trapezul se transformă în pătrat), dacă $\sphericalangle ACE = 45°$.

7. Fie N numărul format din trei cifre, care se caută. Atunci $N = a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c$, $a \in \{1, 2, 3, \ldots, 9\}$, b, $c \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$. Numărul N se poate pune sub forma

$$N = 99a + 11b + a - b + c. \tag{1}$$

Pentru ca N să fie divizibil cu 11 este necesar şi suficient ca $a - b + c$ să fie divizibil* cu 11, adică

$$a - b + c = 11k. \tag{2}$$

Întrucît $-8 \leqslant a - b + c \leqslant 18$, rezultă că sau $k = 0$ sau $k = 1$. Prin ipoteză se impune condiţia $100a + 10b + c = 11 \cdot (a^2 + b^2 + c^2)$.

C a z u l I

$$\begin{cases} 99a + 11b + a - b + c = 11(a^2 + b^2 + c^2), \\ a - b + c = 0. \end{cases}$$

Se aduce sistemul la forma mai simplă

$$\begin{cases} 9a + b = a^2 + b^2 + c^2, \\ b = a + c. \end{cases}$$

De aici rezultă $10a + c = 2a^2 + 2c^2 + 2ac$, ceea ce înseamnă că c este un număr par, adică $c = 2n$. Relaţia de mai sus se va scrie astfel:

$$a^2 - (5 - 2n)a + 4n^2 - n = 0.$$

Deducem de aici că

$$a = \frac{5 - 2n \pm \sqrt{25 - 16n - 12n^2}}{2}.$$

---

* Se putea folosi şi criteriul de divizibilitate prin 11.

Se vor găsi rădăcini reale pentru a dacă $\Delta = 25 - 16n - 12n^2 \geqslant 0$. Fiindcă rădăcinile trinomului $-12n^2 - 16n + 25$ sînt

$$n_1 = \frac{-4 + \sqrt{91}}{6} \text{ şi } n_2 = \frac{-4 - \sqrt{91}}{6},$$

rezultă că $\Delta \geqslant 0$ în cazul în care

$$\frac{-4 - \sqrt{91}}{6} \leqslant n \leqslant \frac{-4 + \sqrt{91}}{6},$$

însă condiţiile ca n să fie întreg şi $n \geqslant 0$, împreună cu faptul că $n_1 < 1$, conduc la concluzia că $0 \leqslant n < 1$, ceea ce arată că $n = 0$. În acest caz rezultă că $c = 0$, iar $a = b = 5$. Numărul căutat va fi, deci, 550.

Cazul II

$$\begin{cases} a - b + c = 11 \\ 99a + 11b + a - b + c = 11 \cdot (a^2 + b^2 + c^2). \end{cases}$$

Scriind sistemul sub forma simplificată

$$\begin{cases} 9a + b + 1 = a^2 + b^2 + c^2, \\ a - b + c = 11, \end{cases}$$

se găseşte

$$b = a + c - 11 \text{ şi } 10a + c - 10 = a^2 + (a + c - 11)^2 + c^2$$

sau

$$-32a + 2a^2 + 2c^2 + 2ac - 23c + 131 = 0,$$

ceea ce arată că numărul c este impar. Fie $c = 2n + 1$. Atunci

$$a^2 - (15 - 2n)a + 4n^2 - 19n + 55 = 0,$$

de unde

$$a = \frac{15 - 2n \pm \sqrt{5 + 16n - 12n^2}}{2}.$$

Se vor găsi rădăcini reale pentru a dacă $\Delta = 5 + 16n - 12n^2 \geqslant 0$. Deoarece $n_1 = \frac{4 + \sqrt{31}}{6}$ şi $n_2 = \frac{4 - \sqrt{31}}{6}$ sînt rădăcinile trinomului de gradul al doilea $12n^2 - 16n - 5$, înseamnă că

$\Delta = 5 + 16n - 12n^2 \geqslant 0$ pentru $n_2 \leqslant n \leqslant n_1$, adică $\frac{4 - \sqrt{31}}{6} \leqslant n \leqslant$ $\leqslant \frac{4 + \sqrt{31}}{6}$, însă, în condițiile ipotezei, n este întreg și $n \geqslant 0$. Ținînd seama de faptul că $n_1 < 2$, rezultă că $n = 0$ sau $n = 1$. Valoarea $n = 0$ nu poate fi acceptată, deoarece $a = \frac{15 \pm \sqrt{5}}{2}$ este irațional; pentru $n = 1$ se găsește $a_1 = 8$ și $a_2 = 5$. Dacă $a = 5$, înseamnă că $c = 3$ iar $b = -3$, ceea ce nu se poate; dacă $a = 8$, atunci $c = 3$ iar $b = 0$ și, prin urmare, numărul căutat este 803. Din modul de rezolvare se deduce că nu există alte numere, afară de 550 și de 803, care să satisfacă condițiile probemei.

Răspuns: 550 și 803.

8. Se consideră funcția $f: \left[-\frac{1}{2}, 0\right) \cup (0, +\infty)$ dată prin

$$f(x) = \frac{4x^2}{(1 - \sqrt{1 + 2x})^2}.$$

Înmulțind numărătorul și numitorul cu $(1 + \sqrt{1 + 2x})^2 \neq 0$, se obține

$$f(x) = \frac{4x^2(1 + \sqrt{1 + 2x})^2}{(1 - 1 - 2x)^2} = (1 + \sqrt{1 + 2x})^2.$$

Acum inegalitatea dată ia forma

$$(1 + \sqrt{1 + 2x})^2 < 2x + 9 \text{ sau } 2\sqrt{1 + 2x} < 7.$$

Deoarece $x \geqslant -\frac{1}{2}$, prin ridicarea la pătrat a ambilor membri pozitivi ai inegalității, se obține egalitatea echivalentă

$$4 + 8x < 49, \text{ adică } -\frac{1}{2} \leqslant x < \frac{45}{8}, \text{ cu condiția ca } x \neq 0.$$

Observație. Dacă se prelungește, ca de obicei, funcția f și în punctul $x = 0$ punînd $f(0) = \lim_{x \to 0} f(x)$, atunci inegalitatea dată se păstrează și pentru cazul $x = 0$.

9. Fie $DE = \frac{a}{n}$ și $BH = x$. În acest caz (fig. 6)

$$x(a - x) = h^2 \tag{1}$$

şi dacă $\sphericalangle HAD = \beta$ şi $\sphericalangle DAE = \alpha$, atunci $\sphericalangle EAH = \alpha + \beta$. Se cunoaşte că

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}. \qquad (2)$$

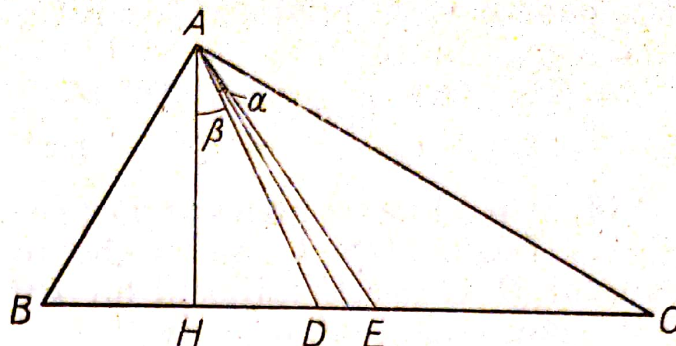


Fig. 6.

Din triunghiul dreptunghic AHE se găseşte că $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{HE}{AH}$. Dar $HE = HD + DE$, $HD = BD - BH$, iar $BD = \frac{n-1}{2n}a$.

De aici rezultă că $HE = \frac{n+1}{2n}a - x$, iar $HD = \frac{n-1}{2n}a - x$. Din această cauză

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{HE}{AH} = \frac{\frac{n+1}{2n}a - x}{h}, \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{\frac{n-1}{2n}a - x}{h}.$$

Prin înlocuirea acestor expresii în (2) se obţine

$$\frac{1}{h}\left(\frac{n+1}{2n}a - x\right) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{h}\left(\frac{n-1}{2n}a - x\right)}{1 - \frac{\operatorname{tg}\alpha}{h}\left(\frac{n-1}{2n}a - x\right)},$$

de unde

$$\operatorname{tg}\alpha\left[\frac{\left(\frac{n+1}{2n}a - x\right)\left(\frac{n-1}{2n}a - x\right)}{h} + h\right] =$$

$$= -\frac{n-1}{2n}a + x + \frac{n+1}{2n}a - x;$$

$$\frac{a}{n} = \frac{h^2 + \frac{n^2-1}{4n^2}a^2 - ax + x^2}{h}\operatorname{tg}\alpha,$$

dar, deoarece din relația (1) se găsește $x^2 - ax = -h^2$, se va obține

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{4n^2 ah}{n(n^2-1)a^2} = \frac{4nh}{a(n^2-1)}.$$

10. Analiza construcției. Fie ABC triunghiul căutat (fig. 7). Segmentele h_a, h_b, m_a sînt date. Dacă se duce $HD \perp AC$ din punctul H care este mijlocul lui BC, atunci $HD \parallel BE$. Prin urmare, HD este linie mijlocie în triunghiul BEC, deci $HD = \frac{1}{2} BE = \frac{1}{2} h_b$.

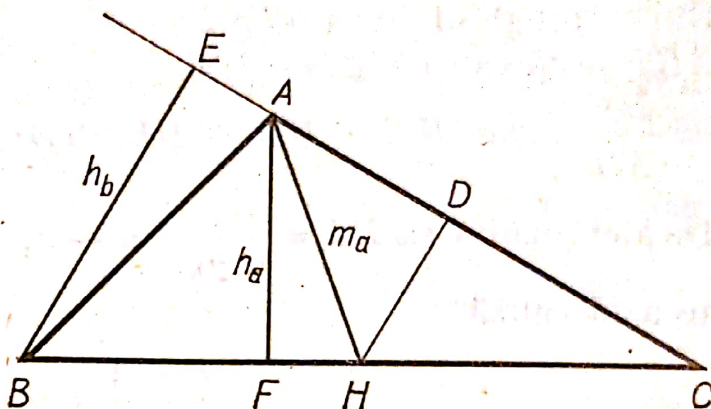


Fig. 7.

Din acestea rezultă clar planul construcției. Cu ajutorul lui h_a și m_a se poate construi triunghiul dreptunghic FAH. Se găsește apoi punctul D la intersecția cercului de diametru $AH = m_a$ cu cercul de rază $\frac{1}{2} h_b$, avînd centrul în punctul H.

Continuarea construcției rezultă din faptul că triunghiul ADH este dreptunghic în D avînd ipotenuza AH, iar $DH = \frac{1}{2} h_b$. Găsindu-se punctul D, poate fi trasată AC. După aceasta punctul B se construiește ca simetric al punctului C față de H.

Construcție. Se ia punctul F pe o dreaptă oarecare MN (fig. 8). Prin punctul F se duce perpendiculara $FA = h_a$ pe această dreaptă. Din punctul A ca centru se descrie cercul de rază m_a. Dacă $m_a > h_b$, cercul intersectează dreapta MN în două puncte H și H'. În caz contrar problema nu poate fi rezolvată.

Se unește punctul A cu punctul H; $AH = m_a$. Se construiește cercul de diametru AH și se descrie un cerc cu centrul în punctul H și rază $\frac{1}{2} h_b$. Dacă $\frac{1}{2} h_b < m_a$, atunci acest cerc intersectează cercul de diametru AH în punctele distincte D și D'. Dacă $\frac{1}{2} h_b \geqslant m_a$, atunci problema nu admite rezolvări. Considerăm în continuare cazul $\frac{1}{2} h_b < m_a$. Se trasează dreapta AD. Aceasta inter-

secteazā pe MN într-un punct C. Pe aceeaşi dreaptă se construieşte punctul B, simetricul punctului C faţă de punctul H. Triunghiul ABC este cel căutat. Într-adevăr, înălţimea sa este $AF = h_a$;

Fig. 8.

$AH = m_a$ este mediană, deoarece H prin construcţie este mijlocul bazei BC a triunghiului ABC. Ducem $BE \perp AC$. Atunci BE este înălţimea din B a triunghiului ABC, iar $HD = \frac{1}{2} h_b$ este linie mijlocie în triunghiul BEC, deci $HD = \frac{BE}{2}$. Rezultă că $BE = h_b$.

Se obţine o a doua rezolvare, ducînd dreapta AC' prin punctele A şi D' şi construindu-se punctul B' simetric cu punctul C' faţă de H. Într-adevăr, în triunghiul $C'AB'$ înălţimea este $AF = h_a$, iar mediana este $HA = m_a$. Ducînd $B'E' \perp AC'$, se obţine că $B'E' \parallel HD'$, deci HD' este linie mijlocie în triunghiul $C'E'B'$, adică $HD' = \frac{B'E'}{2}$. Fiindcă punctul D' este situat pe cercul de centru H şi de rază $\frac{1}{2} h_b$, rezultă că $HD' = \frac{1}{2} h_b$, deci $\frac{1}{2} h_b = \frac{B'E'}{2}$, adică $B'E' = h_b$. Se mai obţin încă două rezolvări, dacă se ia segmentul AH' ca mediană m_a. Cele două triunghiuri care se obţin, simetrice faţă

de înălţimea AF, se vor deosebi de cele anterior găsite numai prin poziţia lor.

Problema are, astfel, două rezolvări diferite în condiţiile în care $m_a > h_a$ şi $m_a > \frac{1}{2} h_b$.

11. Se demonstrează punctul b).

b) Dacă punctul X coincide cu punctul A, iar Y cu B', condiţia este satisfăcută de punctul E (fig. 9) care împarte segmentul AB' în raportul $\frac{B'E}{AE} = \frac{2}{1}$. Dacă punctul X coincide cu punctul C, iar punctul Y coincide cu punctul B', condiţia este îndeplinită de punctul F care împarte segmentul CB' în raportul $\frac{BF'}{FC} = \frac{2}{1}$. Dacă punctul X este mobil pe segmentul AC, iar punctul Y coincide cu punctul B', segmentul EF va fi locul geometric al punctelor care satisfac relaţia dată. Într-adevăr, triunghiul $B'EF$ este asemenea cu triunghiul $B'AC$. De aceea segmentul EF este locul geometric al punctelor care satisfac aceeaşi condiţie ca şi punctele E şi F.

În mod analog se construieşte şi locul geometric KL în planul $D'AC$. Unindu-se punctul K cu punctul F şi punctul L cu punctul E, se obţin două perechi de triunghiuri asemenea : $\Delta CKF \sim \Delta CD'B'$ şi $\Delta AEL \sim \Delta AD'B'$. Punctele segmentelor KF şi EL aparţin locului geometric căutat, deoarece pentru ambele perechi de triunghiuri asemenea raportul de asemănare este $\frac{1}{3}$.

Astfel, patrulaterul $EFKL$ aparţine în întregime locului geometric căutat. Orice punct interior acestui patrulater aparţine, de asemenea, locului geometric respectiv. Într-adevăr, dacă se ia pe AC un punct oarecare X, iar pe $D'B'$ un punct oarecare Y, se poate arăta că punctul Z care împarte segmentul XY în raportul $\frac{YZ}{XZ} = \frac{2}{1}$ aparţine patrulaterului $EFKL$. Pentru aceasta se duce planul care conţine pe AC şi pe Y. Acest plan intersectează planul $D'C'B'$ după dreapta CY şi planul $AB'D'$ după dreapta AY. Prin urmare, el va intersecta planul patrulaterului $EFKL$ după dreapta

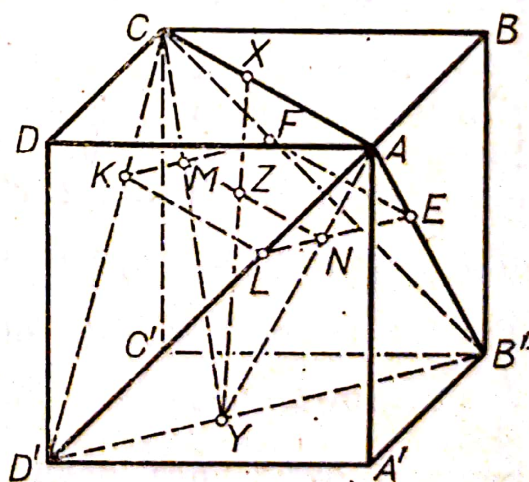


Fig. 9.

căutată MN. Triunghiul YMN este asemenea cu triunghiul YCA. Se arată ușor că raportul de asemănare este $\frac{2}{3}$. Dreapta XY este situată în planul acestor triunghiuri și trece prin punctul Y, deci segmentul XY intersectează dreapta $MN \parallel AC$ într-un punct Z care îl împarte în raportul $\frac{2}{1}$; pe XY se află însă un singur punct care îl împarte în acest raport, ceea ce înseamnă că acest punct este tocmai Z, deci aparține planului patrulaterului $EFKL$. Se demonstrează, în continuare, că orice punct interior Z al patrulaterului $EFKL$ aparține unui segment cu extremitățile situate pe AC, respectiv pe $D'B'$, care este împărțit de acest punct în raportul $\frac{2}{1}$. Se duce un plan prin dreapta AC și punctul Z. Acest plan va intersecta planul patrulaterului $EFKL$ după o dreaptă $MN \parallel EF \parallel KL$. În acest caz, Z fiind un punct interior al patrulaterului, MN este situată între KL și EF și, prin urmare, punctele de intersecție ale acesteia cu LE și FK sînt situate în interiorul acestor segmente; în consecință intersecțiile sale cu planele $CD'B'$ și $AD'B'$ respectiv vor fi drepte situate în interiorul unghiurilor $D'CB'$ și $D'AB'$, iar intersecția cu segmentul $D'B'$ va fi un punct Y interior lui $D'B'$. Din considerarea triunghiurilor YMN și YCA este evident că $\frac{YZ}{XZ} = \frac{2}{1}$.

În încheiere se va arăta că patrulaterul $EFKL$ este dreptunghi și se va găsi mărimea fiecăreia dintre laturile sale. Se arată cu ușurință că $LK = EF$ și că $EL \parallel KF \parallel D'B'$, $LK \parallel EF \parallel AC$, din considerente privind asemănarea de triunghiuri. Din cauză că $AC \perp D'B'$ rezultă că $EFKL$ este dreptunghi; $KF = LE = \frac{1}{3} D'B' = \frac{1}{3} a\sqrt{2}$;

$EF = LK = \frac{2}{3} AC = \frac{2}{3} a\sqrt{2}$.

Problema care a fost studiată poate fi generalizată pentru orice valoare a raportului $\frac{YZ}{XZ}$, demonstrația dată păstrîndu-și valabilitatea și în acest caz. În condițiile punctului a) raportul $\frac{YZ}{XZ} = 1$.

12. (Fig. 10). a) **Analiza construcției.** Se presupune problema rezol-

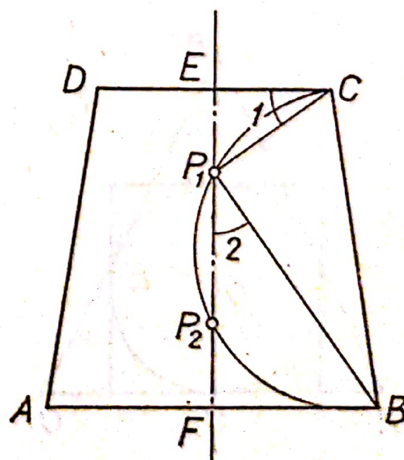


Fig. 10.

vată. În acest caz CB se vede din punctul P sub un unghi drept, ceea ce înseamnă că punctul P este situat pe cercul de diametru CB.

C o n s t r u c ţ i e. Pe diametrul CB se descrie un semicerc; punctele P_1 şi P_2 sînt punctele de intersecţie ale acestuia cu axa EF. Semicercul construit pe AD ca diametru trece de asemenea prin punctele P_1 şi P_2 (din cauză că EF este axă de simetrie a trapezului).

Se observă că P_1 şi P_2 sînt situate neapărat în interiorul segmentului EF.

b) $EP_1 = x$, $FP_1 = h - x$, $\sphericalangle P_1CE = \sphericalangle BP_1F$, deoarece sînt unghiuri cu laturile perpendiculare, $\hat{E} = \hat{F} = \frac{\pi}{2}$, $\Delta EP_1C \sim \Delta FP_1B$,

$$\frac{EP_1}{FB} = \frac{EC}{P_1F}, \quad \frac{x}{\frac{a}{2}} = \frac{\frac{h}{2}}{h - x}; \; hx - x^2 = \frac{ab}{4}; \; x^2 - hx + \frac{ab}{4} = 0;$$

$$x = \frac{h}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{h^2 - ab}.$$

c) Dacă $h^2 > ab$, problema are două rezolvări, deoarece în acest caz cercul intersectează axa de simetrie în două puncte diferite.

În cazul $h^2 = ab$ problema are o singură rezolvare. Cercul este tangent la axa de simetrie.

Dacă $h^2 < ab$, problema nu are rezolvare. Cercul nu intersectează axa de simetrie.

Problema se poate rezolva în cazul cînd $h^2 \geqslant ab$.

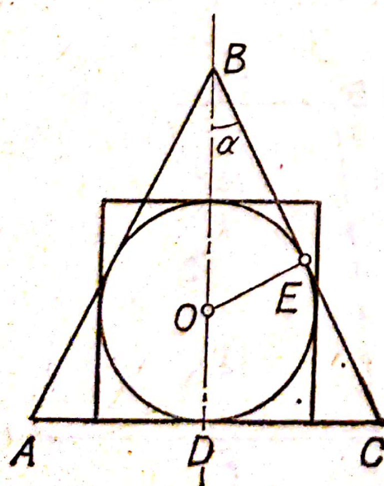


Fig. 11.

13. (Fig. 11). Fie 2α unghiul de la vîrful secţiunii axiale a conului iar r raza sferei înscrise în con. Volumul conului va fi

$$V_1 = \frac{\pi h a^2}{3}, \qquad (1)$$

unde $a = DC$ şi $h = BD$. Este evident că

$$BD = BO + OD = \frac{r}{\sin\alpha} + r = \frac{r(1+\sin\alpha)}{\sin\alpha},$$

$$DC = \frac{r(1+\sin\alpha)}{\sin\alpha}\operatorname{tg}\alpha.$$

Înlocuind valorile găsite în formula (1), se obține

$$V_1 = \frac{\pi r^3 (1 + \sin \alpha)^3}{3 \sin \alpha \cos^2 \alpha} = \frac{\pi r^3 (1 + \sin \alpha)^2}{3 \sin \alpha (1 - \sin \alpha)}. \qquad (2)$$

Volumul cilindrului circumscris sferei de rază r este

$$V_2 = 2\pi r^3 \qquad (3)$$

(înălțimea cilindrului este $2r$).

Fie $\frac{V_1}{V_2} = k$, atunci $k = \frac{(1 + \sin \alpha)^2}{6 \sin\alpha (1 - \sin\alpha)}$. Se va exprima acum $\sin \alpha$ prin k. Se găsește ecuația de gradul al doilea

$$(1 + 6k) \sin^2 \alpha + 2(1 - 3k) \sin \alpha + 1 = 0. \qquad (4)$$

Această ecuație va avea rădăcini reale dacă și numai dacă $\Delta = (1 - 3k)^2 - (1 + 6k) \geqslant 0$. Astfel, $k \geqslant \frac{4}{3}$ și deci egalitatea $V_1 = V_2$ nu poate avea loc.

Pentru $k = \frac{4}{3}$ se obține $\sin \alpha = \frac{1}{3}$, iar $OB = 3r$.

Unghiul α se construiește ca unghi al unui triunghi dreptunghic în care cateta care se opune acestui unghi este de trei ori mai mică decît ipotenuza.

14.
$$\begin{cases} x + y + z = a & (1) \\ x^2 + y^2 + z^2 = b^2 & (2) \\ xy = z^2 & (3) \end{cases}$$

Din relațiile (2) și (3) se obține

$$(x + y)^2 = b^2 + z^2,$$

iar din (1) rezultă că $(x + y)^2 = (a - z)^2$, deci $a^2 - 2az = b^2$, adică

$$z = \frac{a^2 - b^2}{2a}. \qquad (4)$$

Introducînd valoarea lui z din (4) în (1) și în (3), se găsesc

$$x + y = \frac{a^2 + b^2}{2a}, \quad xy = \frac{(a^2 - b^2)^2}{4a^2}, \qquad (5)$$

de unde rezultă că

$$x_{1,2} = \frac{a^2 + b^2}{4a} \pm \frac{\sqrt{10a^2b^2 - 3a^4 - 3b^4}}{4a};$$

$$y_{1,2} = \frac{a^2 + b^2}{4a} \mp \frac{\sqrt{10a^2b^2 - 3a^4 - 3b^4}}{4a};$$

$$z_{1,2} = \frac{a^2 - b^2}{2a}.$$

D i s c u ţ i e. Pentru ca rădăcinile să fie pozitive, este necesar ca $x + y = \frac{a^2 + b^2}{2a} > 0$, de unde rezultă $a > 0$. Rădăcinile sistemului (5) vor fi reale şi distincte, dacă $\Delta = (a^2 + b^2)^2 - 4(a^2 - b^2)^2 = 10a^2b^2 - 3a^4 - 3b^4 > 0$. Rezolvînd această inecuaţie de gradul al doilea, se găseşte condiţia necesară $\frac{1}{\sqrt{3}} < \frac{a}{|b|} < \sqrt{3}$. Valorile lui x şi y vor fi neapărat pozitive, deoarece $\Delta < (a^2 + b^2)^2$. Din expresia (4) rezultă că z este pozitiv cînd $a > 0$, cu condiţia $a^2 > b^2$. Astfel, a satisface condiţia $|b| < a < |b|\sqrt{3}$.

15. Aria S a triunghiului se găseşte din formula lui Heron

$$S = \sqrt{\frac{a + b + c}{2} \cdot \frac{a + b - c}{2} \cdot \frac{a + c - b}{2} \cdot \frac{b + c - a}{2}},$$

în care toţi factorii sînt pozitivi. Pentru evaluarea produsului $(a + b - c)(a + c - b)(b + c - a)$ se poate folosi inegalitatea

$$\frac{x + y + z}{3} \geqslant \sqrt[3]{xyz} \text{ sau } xyz \leqslant \frac{(x + y + z)^3}{27}.$$

Punînd $x = a + b - c$; $y = a + c - b$; $z = b + c - a$, se obţine

$$4S = \sqrt{(a + b + c)(a + b - c)(a + c - b)(b + c - a)} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{(a + b + c)\frac{(a + b + c)^3}{27}} = \frac{(a + b + c)^2}{3\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{3a^2 + 3b^2 + 3c^2 - (a - b)^2 - (b - c)^2 - (c - a)^2}{3\sqrt{3}} \leqslant \frac{a^2 + b^2 + c^2}{\sqrt{3}},$$

egalitatea avînd loc în cazul în care $a = b = c$, ceea ce trebuia demonstrat.

16. a) Fie n par, de forma $n = 2m$. Atunci $\cos^{2m}x = 1 + \sin^{2m}x$. Întrucît $\cos^{2m} x \leqslant 1 \leqslant 1 + \sin^{2m} x$, rezultă că $\sin x = 0$ şi $\cos x = \pm 1$, deci $x = k\pi$, $k \in Z$.

b) Fie n impar, de forma $n = 2m + 1$ $(m \geqslant 1)$. Atunci

$$\cos^{2m+1} x - \sin^{2m+1} x = \cos^{2m+1}(-x) + \sin^{2m+1}(-x) = 1.$$

Pentru $x \neq k\frac{\pi}{2}$, $|\cos(-x)| < 1$ şi $|\sin(-x)| < 1$ şi are loc inegalitatea

$$|\cos^{2m+1}(-x) + \sin^{2m+1}(-x)| \leqslant |\cos^{2m+1}(-x)| + |\sin^{2m+1}(-x)| \leqslant$$
$$\leqslant |\cos^{2m-1}(-x)| \cos^2(-x) + |\sin^{2m-1}(-x)| \sin^2(-x) <$$
$$< \cos^2(-x) + \sin^2(-x) = 1.$$

Prin urmare, soluţiile pot fi numai de forma $x = k\frac{\pi}{2}$, impunîndu-se condiţia ca unul din termeni să fie egal cu 0, iar celălalt cu -1. De aici rezultă o primă mulţime de soluţii sub forma $x = 2k\pi$, iar a doua mulţime de soluţii va fi de forma $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$, $k \in Z$.

c) Fie $n = 1$. În acest caz ecuaţia se scrie $\cos x - \sin x = 1$. Se ridică ambii membri la pătrat şi se obţine $\cos^2 x - 2\cos x \sin x + \sin^2 x = 1$, adică $2\cos x \sin x = 0$. Soluţiile ecuaţiei obţinute sînt $x = k\frac{\pi}{2}$, $k \in Z$. Numai unele dintre acestea vor fi soluţii şi pentru ecuaţia iniţială, celelalte fiind soluţii ale ecuaţiei $\cos x - \sin x = -1$. Este clar că soluţiile ecuaţiei care aparţin intervalului $[0, 2\pi)$ vor fi $x_1 = 0$ şi $x_2 = \frac{3\pi}{2}$. Se obţin deci două mulţimi de soluţii :

$$x = 2k\pi; \; x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}; \qquad k \in Z.$$

17. Se duc medianele P_1M_1, P_2M_2 şi P_3M_3 în triunghiul dat (fig. 12). Acestea îl descompun în şase triunghiuri de forma SP_iM_j, punctul S fiind centrul de greutate al triunghiului. Cînd punctul P coincide cu punctul S, atunci

$$\frac{P_1P}{PM_1} = \frac{P_2P}{PM_2} = \frac{P_3P}{PM_3} = \frac{2}{1}.$$

Fie punctul P diferit de punctul S. În acest caz punctul P este situat în interiorul sau pe laturile unuia dintre triunghiurile în care a fost descompus triunghiul dat. Se va presupune, fără a restrînge generalitatea, că acesta este $\triangle P_1SM_2$. Laturile P_2P_1 şi P_1P_3 vor fi împărţite în raportul $\frac{2}{1}$ cu ajutorul punctelor S_{12} şi respectiv S_{31}. Este evident că $SS_{12} \parallel P_1P_3$ şi $SS_{31} \parallel P_2P_3$, iar triunghiul P_1SM_2 este situat în interiorul trapezului $P_1S_{12}SM_2$. Dreapta P_2Q_2 intersectează pe SS_{12} în punctul A_2, situat între punctele P_2 şi P. Din aceasta rezultă că $\frac{P_2P}{PQ_2} \geqslant \frac{P_2A_2}{A_2Q_2} = \frac{2}{1}$. În mod analog, P_1SM_2 este situat în interiorul triunghiului P_1SS_{31}. Dreapta P_1P intersectează dreapta SS_{31} în punctul A_1, care în acest caz nu se găseşte în interiorul lui P_1P, ci în interiorul segmentului PQ_1. Rezultă

$$\frac{P_1P}{PQ_1} \leqslant \frac{P_1A_1}{A_1Q_1} = \frac{2}{1},$$

ceea ce se cerea demonstrat.

18. Fie ΔABC care se cere. Atunci $\sphericalangle AMC = \pi - \omega > \frac{\pi}{2}$, iar L este mijlocul lui AC (fig. 13). Segmentul $ML = \frac{c}{2}$, deoarece este linie mijlocie în triunghiul ABC. De aici rezultă următoarea construcţie.

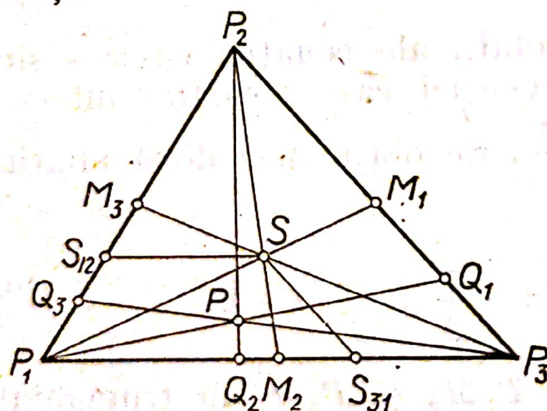


Fig. 12.

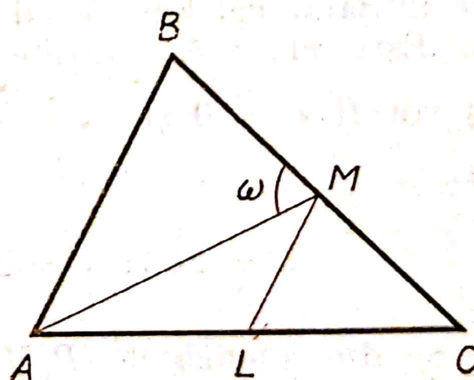


Fig. 13.

Pe $AC = b$ se construieşte un segment de cerc capabil de $\sphericalangle AMC = \pi - \omega$ (fig. 14) şi se descrie apoi un cerc cu centrul în mijlocul L al segmentului AC şi de rază $\frac{c}{2}$. Punctele căutate M

şi M_1 se vor găsi la intersecţia acestui cerc cu segmentul de cerc construit anterior. Unind punctul M cu punctul C şi luînd pe această dreaptă din punctul C un segment de lungime $2MC$, se obţine punctul B.

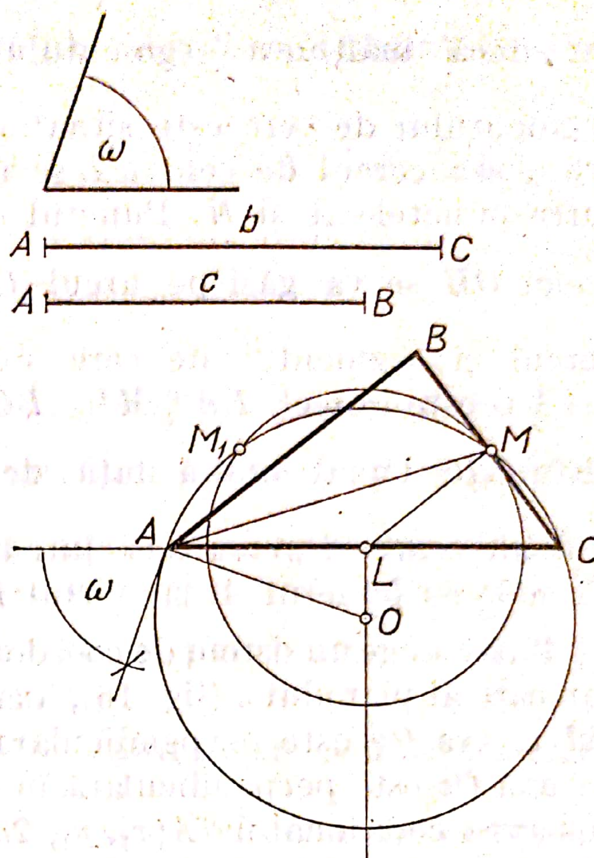


Fig. 14.

D i s c u ţ i e. Pentru ca problema să poată fi rezolvată, este necesar şi suficient ca cercul să se intersecteze cu segmentul de cerc. Fie O centrul segmentului de cerc (fig. 15) capabil de unghiul AMC. Întrucît $\omega < \frac{\pi}{2}$, punctul O şi segmentul de cerc vor fi situate de o parte, respectiv de cealaltă a coardei AC. Fie $OH \perp AC$ raza care împarte coarda AC şi segmentul de cerc în părţi egale, iar M punctul căutat de intersecţie, situat, pentru fixarea ideilor, pe arcul AH. Din triunghiul OLM rezultă că $R = OM \leqslant OL + LM = R - HL + \frac{c}{2}$, adică $\frac{b}{2}\operatorname{tg}\frac{\omega}{2} \leqslant \frac{c}{2}$, dacă $HL = \frac{b}{2}\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}$ este înălţimea segmentului de cerc. Considerăm triunghiurile AMC şi AMB. Acestea au latura AM comună şi $BM = MC$. Prin ipoteză $\sphericalangle BMA = \omega < 90° < 180° - \omega = \sphericalangle CMA$.

De aceea

$$b = AC > AB = c \text{ şi } \frac{b}{2} > \frac{c}{2}.$$

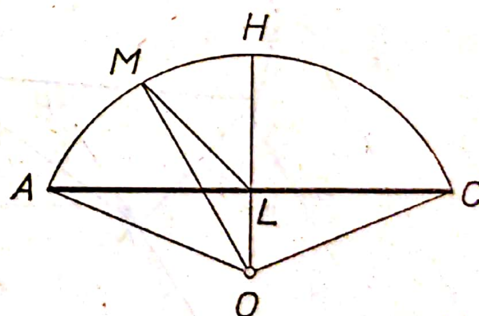


Fig. 15.

Condiţiile $\frac{b}{2}\operatorname{tg}\frac{\omega}{2} \leqslant \frac{c}{2} < \frac{b}{2}$ sînt necesare, aşa cum s-a arătat, însă sînt şi suficiente. Dacă raza $LM = \frac{c}{2} < \frac{b}{2} = LA$, atunci extremitatea A a segmentului de cerc este situată în afara cercului de centru L

iar, dacă înălţimea segmentului $h = \frac{b}{2} \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} < \frac{c}{2}$, mijlocul H al segmentului de cerc este situat în interiorul cercului de centru L. De aceea cercul de centru L se intersectează cu segmentul de cerc între punctele A şi H. Punctul simetric cu M faţă de linia centrelor OH se va găsi pe arcul CH. În cazul limită, cînd $h = \frac{c}{2}$, cercul şi segmentul de cerc sînt tangente în punctul $M \equiv H$, ΔAMC este isoscel, $BA \parallel ML \perp BC$, deci ΔABC este dreptunghic în vîrful B. Cazul limită faţă de cealaltă condiţie $\frac{b}{2} = \frac{c}{2}$ dă un triunghi care degenerează într-un segment, deoarece punctul M coincide cu punctul A, iar vîrful B este situat pe prelungirea lui AC.

19. Se alege un sistem de coordonate astfel : originea O este un punct oarecare al planului ε (fig. 16), axa Ox este o dreaptă oarecare din planul ε, axa Oy este perpendiculara pe Ox şi este situată în planul ε, iar axa Oz este perpendiculară în O pe planul xOy. Punctele A, B, C vor avea coordonatele $A(x_1, y_1, 2a)$, $B(x_2, y_2, 2b)$, $C(x_3, y_3, 2c)$, printre numerele a, b, c găsindu-se cel puţin două care să fie diferite între ele. Centrul de greutate S al triunghiului ABC are coordonatele

$$S\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}, \frac{2(a + b + c)}{3}\right).$$

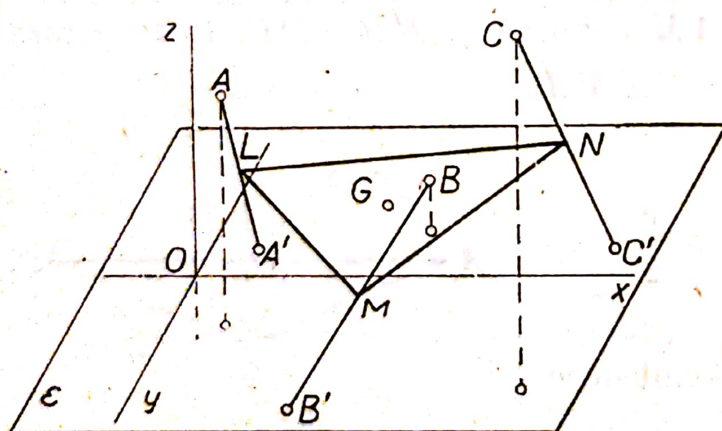


Fig. 16.

Punctele A', B', C' vor avea coordonatele $A'(x_1', y_1', 0)$; $B'(x_2', y_2', 0)$, $C'(x_3', y_3', 0)$ iar mijloacele segmentelor AA', BB', CC' vor fi notate cu L, M şi N respectiv :

$$L\left(\frac{x_1 + x_1'}{2}, \frac{y_1 + y_1'}{2}, a\right),$$

$$M\left(\frac{x_2 + x_2'}{2}, \frac{y_2 + y_2'}{2}, b\right),$$

$$N\left(\frac{x_3 + x_3'}{2}, \frac{y_3 + y_3'}{2}, c\right).$$

Fie G centrul de greutate al triunghiului LMN; coordonatele sale vor fi

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x'_1 + x'_2 + x'_3}{2 \cdot 3}; \quad \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y'_1 + y'_2 + y'_3}{2 \cdot 3};$$

$$\frac{a + b + c}{3}.$$

Punctele locului geometric vor fi situate, în consecinţă, în planul de ecuaţie $z = \frac{a + b + c}{3}$ (1) paralel cu planul ε şi împărţind în două distanţa de la centrul de greutate S al triunghiului ABC la planul ε. Se arată că orice punct al acestui plan este punct al locului geometric. Se ia pentru aceasta un punct arbitrar $G\left(\bar{x}, \bar{y}, \frac{a + b + c}{3}\right)$, situat în planul (1) şi se arată că în planul ε există punctele $A'(x'_1, y'_1)$; $B'(x'_2, y'_2)$ şi $C'(x'_3, y'_3)$. Coordonatele punctelor A', B' şi C' se determină din relaţiile:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x'_1 + x'_2 + x'_3}{6}, \quad \bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y'_1 + y'_2 + y'_3}{6},$$

unde (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) sînt date. Luîndu-se arbitrar x'_2 şi x'_3, se determină x'_1 din prima relaţie, iar luîndu-se arbitrar y'_2 şi y'_3, se determină y'_1 din a doua relaţie.

20. M e t o d a I. Fie m numărul care satisface condiţiile a) şi b):

$$m = \overline{a_1 a_2 \ldots a_{n-1} 6};$$

$$k = 4m = \overline{6 a_1 a_2 \ldots a_{n-1}}.$$

Fiindcă ultima cifră a lui m este 6, ultima cifră a numărului $k = 4m$ trebuie să fie 4, adică $a_{n-1} = 4$. Înlocuind valoarea lui a_{n-1} găsită în exprimarea lui m, înmulţind pe m cu 4, se găseşte $a_{n-2} = 8$. Înlocuind în expresia lui m valoarea lui a_{n-2}, se obţine $a_{n-3} = 3$ ş.a.m.d. Ultima operaţie de acest fel se face atunci cînd se obţine cifra 6. Numărul obţinut 153846 satisface condiţiile a) şi b), nici un alt număr mai mic neputînd să le satisfacă.

M e t o d a II. Fie $m = \overline{a_1 a_2 \ldots a_{n-1} 6}$. Acest număr poate fi scris sub forma $m = 10x + 6$, unde $x = \overline{a_1 a_2 \ldots a_{n-1}}$ este un număr întreg care are $n - 1 = y$ cifre. De aceea

$$4(10x + 6) = 6 \cdot 10^y + x,$$

adică

$$39x = 6(10^y - 4)$$

sau

$$13x = 2(10^y - 4),$$

ceea ce înseamnă că $10^y - 4$ se divide la 13.

Considerăm numerele 6, 96, 996, 9996, ... și vom căuta printre acestea pe cel mai mic care se împarte fără rest la 13. Acesta va fi numărul $99\,996 = 13 \cdot 7692$. De aceea $y = 5$. Din ecuație găsim $x = 15\,384$. Numărul căutat va fi $m = 153\,846$. Într-adevăr, se găsește

$$4 \cdot 153\,846 = 615\,384.$$

21. Radicalii din membrul întîi al ecuației există numai dacă

$$3 - x \geqslant 0 \text{ și } x + 1 \geqslant 0, \text{ adică } -1 \leqslant x \leqslant 3.$$

Se consideră inecuația

$$(\sqrt{3 - x} - \sqrt{x + 1})^2 > \frac{1}{4}, \qquad (1)$$

obținută ca o consecință a inecuației inițiale, însă care nu îi este echivalentă, deoarece este verificată și de valorile lui x care sînt soluții ale inecuației

$$-(\sqrt{3 - x} - \sqrt{x + 1}) > \frac{1}{2}.$$

Astfel, soluții ale inecuației inițiale sînt acele și numai acele soluții ale inecuației (1) pentru care diferența $\sqrt{3 - x} - \sqrt{x + 1}$ este pozitivă.

Soluțiile inecuației $\sqrt{3 - x} - \sqrt{x + 1} \geqslant 0$ vor fi, cum se vede ușor, numerele $x \leqslant 1$.

Întrucît inegalitățile $-1 \leqslant x \leqslant 3$ trebuie să fie, de asemenea, satisfăcute, trebuie să fie considerate acele valori ale lui x pentru care $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Pentru astfel de valori ale lui x, în locul inecuației inițiale poate fi rezolvată inecuația (1). După efectuarea calculelor, se obține

$$\sqrt{3 - x} \cdot \sqrt{x + 1} < \frac{15}{8}.$$

Prin ridicare la pătrat şi aducîndu-se la o formă mai simplă, se găseşte

$$64x^2 - 128x + 33 > 0. \quad (2$$

Această inecuaţie este echivalentă cu inecuaţia iniţială dacă $-1 \leqslant x \leqslant 1$, deoarece pentru aceste valori ale lui x ambele expresii care se găsesc sub radicali sînt nenegative. Se obţin

$$x_1 = 1 - \frac{\sqrt{31}}{8} \text{ şi } x_2 = 1 + \frac{\sqrt{31}}{8}$$

ca rădăcini ale ecuaţiei $64x^2 - 128x + 33 = 0$. Atunci inegalitatea (2) are loc pentru $x < x_1$ şi $x > x_2$. Asociind aceste inegalităţi condiţiilor $-1 \leqslant x \leqslant 1$, deducem în cele din urmă că

$$-1 \leqslant x \leqslant 1 - \frac{\sqrt{31}}{8}.$$

În continuare se dă o a doua metodă de rezolvare a acestei probleme. Se consideră $-1 \leqslant x \leqslant 3$. Cu aceleaşi transformări, ca şi în cazul primei rezolvări, se obţin

$$x_1 = 1 - \frac{\sqrt{31}}{8} \text{ şi } x_2 = 1 + \frac{\sqrt{31}}{8}.$$

Se observă că $\sqrt{3 - x_1} - \sqrt{x_1 + 1} = \frac{1}{2}$. Fără a mai pune în continuare problema echivalenţei transformărilor, vom considera inecuaţia iniţială. Este evident că pentru $x > x_1$

$$\sqrt{3 - x} < \sqrt{3 - x_1} \quad \text{iar} \quad \sqrt{x + 1} > \sqrt{x_1 + 1}$$

şi de aceea

$$\sqrt{3 - x} - \sqrt{x + 1} < \sqrt{3 - x_1} - \sqrt{x_1 + 1} = \frac{1}{2}.$$

În mod analog, pentru $x < x_1$ se obţine $\sqrt{3 - x} - \sqrt{x + 1} > \frac{1}{2}$.

Soluţiile vor fi

$$-1 \leqslant x \leqslant 1 - \frac{\sqrt{31}}{8}.$$

Cea mai răspîndită greşeală în rezolvarea problemei 21 a fost lipsă demonstraţiei echivalenţei dintre inegalităţile obţinute şi cea iniţială.

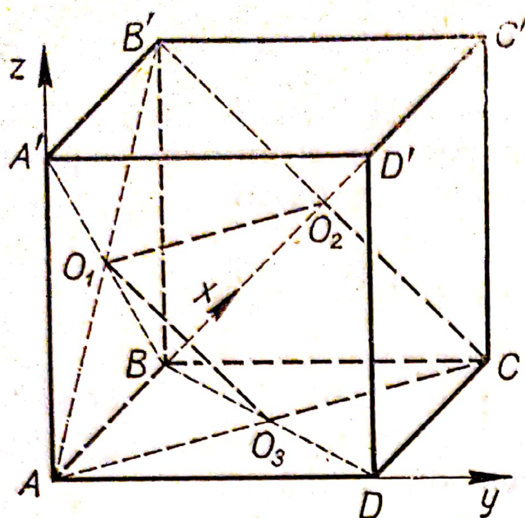


Fig. 17.

22. Se notează centrul feţei $ABB'A'$ prin O_1 (fig. 17), centrul feţei $BB'C'C$ prin O_2, centrul feţei $ABCD$ prin O_3. Se demonstrează că locul geometric al mijloacelor Z ale segmentelor XY este linia frîntă $O_1O_2CO_3O_1$. Fie A originea unui sistem de coordonate, iar AB, AD şi AA' vor materializa axele de coordonate Ax, Ay, Az respectiv, $AB = AD = AA' = 1$. Se împarte timpul în care punctul X parcurge drumul $ABCDA$ în patru părţi egale, luîndu-se cantitatea de timp obţinută astfel drept unitate de măsură.

Se cunoaşte că dacă un punct K se mişcă uniform şi rectiliniu, atunci coordonatele sale depind liniar de timp şi, reciproc, dacă coordonatele punctului K depind liniar de timp, atunci punctul K se mişcă uniform şi rectiliniu. De asemenea este cunoscut faptul că dacă T este mijlocul segmentului OP $[O(x_1, y_1, z_1), P(x_2, y_2, z_2)]$, atunci $T\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$.

Se va alcătui, folosind afirmaţiile de mai sus, următorul tabel al dependenţei coordonatelor punctelor X, Y, Z de timpul t.

		$0 \leqslant t \leqslant 1$	$1 \leqslant t \leqslant 2$	$2 \leqslant t \leqslant 3$	$3 \leqslant t \leqslant 4$
X	x	t	1	$3-t$	0
	y	0	$t-1$	1	$4-t$
	z	0	0	0	0
Y	x	1	1	1	1
	y	t	1	$3-t$	0
	z	1	$2-t$	0	$t-3$
Z	x	$\frac{1+t}{2}$	1	$\frac{4-t}{2}$	$\frac{1}{2}$
	y	$\frac{t}{2}$	$\frac{t}{2}$	$\frac{4-t}{2}$	$\frac{4-t}{2}$
	z	$\frac{1}{2}$	$\frac{2-t}{2}$	0	$\frac{t-3}{2}$

Pentru $t = 0, 1, 2, 3, 4$ se observă uşor că Z se află în O_1, O_2, C, O_3 şi din nou O_1, iar pe segmentele ce le unesc pe acestea coordonatele lui Z variază liniar, deci Z descrie în spaţiu segmentele O_1O_2, O_2C, CO_3, O_3O_1 şi deci punctul Z se mişcă de-a lungul rombului $O_1O_2CO_3O_1$.

Folosind alte metode de rezolvare, este necesar să se demonstreze şi afirmaţia reciprocă şi anume că dacă punctul M este situat pe linia poligonală respectivă, atunci M este mijlocul segmentului XY. Lipsa demonstraţiei acestei propoziţii a fost greşeala caracteristică în rezolvarea acestei probleme.

23. Aplicînd formulele

$$2\cos^2 x = 1 + \cos 2x, \qquad 2\cos^2 2x = 1 + \cos 4x,$$

se obţine

$$\cos 2x + \cos 4x + 2\cos^2 3x = 0.$$

Folosind formula de transformare în produs a expresiei $\cos\alpha + \cos\beta$, se găseşte

$$2\cos 3x \cos x + 2\cos^2 3x = 0$$

sau

$$2\cos 3x(\cos x + \cos 3x) = 0,$$

$$2\cos 3x\, 2\cos 2x \cos x = 0. \qquad (1)$$

Soluţiile ecuaţiei (1) sînt:

$$x_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad 2x_2 = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad 3x_3 = \frac{\pi}{2} + k\pi,$$

sau

$$x_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad x_2 = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2},$$

$$x_3 = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}, \quad k \in Z.$$

Se observă că prima mulţime de soluţii este inclusă în cea de-a treia.

24. Într-un patrulater convex avînd vîrfurile notate succesiv A, B, C, D (fig. 18), se poate înscrie, după cum se ştie, un cerc, dacă şi numai dacă

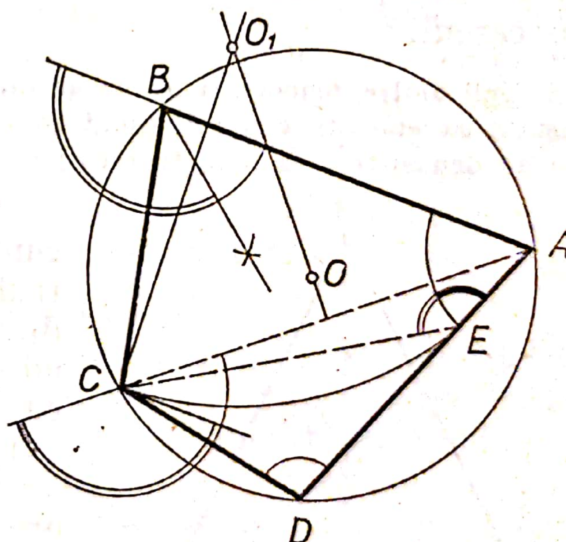


Fig. 18.

$$AD + BC = AB + CD.$$

Presupunînd, fără a restrînge generalitatea, că $AB \geq BC$, se obţine

$$AB - BC = AD - CD \geq 0.$$

În acest caz problema se reduce la construirea triunghiului ACD, cunoscîndu-se baza AC, $\sphericalangle ADC = \pi - \sphericalangle ABC$ şi diferenţa $AD - CD$. Se consideră problema rezolvată, triunghiul ADC fiind construit. Se aşază peste segmentul AD, începînd din D, segmentul $DE = CD$. Triunghiul CDE va fi, astfel, isoscel.

$$\sphericalangle CED = \frac{\pi - \sphericalangle ADC}{2} = \frac{\sphericalangle ABC}{2},$$

$$\sphericalangle AEC = \pi - \frac{\sphericalangle ABC}{2}.$$

De aici rezultă următoarea c o n s t r u c ţ i e. Se construieşte un segment de cerc care se sprijină pe segmentul AC, nu este situat faţă de acesta de o aceeaşi parte cu punctul B şi este capabil de unghiul AEC a cărui mărime este $\pi - \frac{\sphericalangle ABC}{2}$. Din punctul A ca centru se descrie un cerc de rază egală cu $AB - BC$. Atunci punctul căutat E se găseşte la intersecţia segmentului de cerc cu cercul (această intersecţie este totdeauna nevidă, deoarece $AE < AC$ şi deci $AB - BC < AC$). Se prelungeşte AE pînă intersectează cercul dat în punctul căutat D. Problema are totdeauna o rezolvare unică pe arcul AC care nu conţine pe B. Dacă $AB = BC$, se obţine punctul D ca intersecţie a bisectoarei unghiului ABC cu cercul.

Unii dintre concurenţi nu au arătat, rezolvînd această problemă, cum se ia segmentul necesar de cerc. Folosind rezolvarea algebrică a problemei, alţi concurenţi nu au demonstrat că aceasta este posibilă.

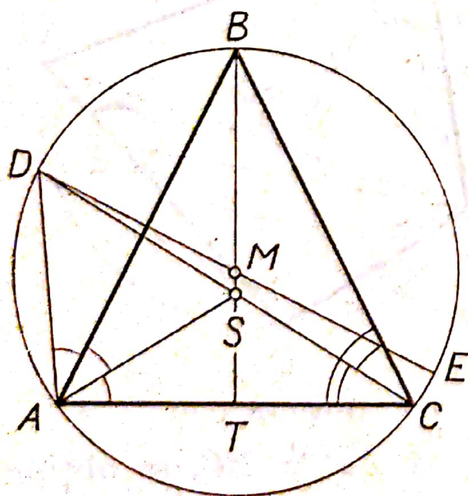


Fig. 19.

25. Fie $AB = BC$. Se notează cu M centrul cercului circumscris, cu S centrul cercului înscris şi fie D al doilea punct de intersecţie al dreptei CS cu cercul circumscris. Se demonstrează, mai întîi, că ΔADS este isoscel (fig. 19). Este evident că $\sphericalangle BCS = \sphericalangle SCA = \sphericalangle SAC = \sphericalangle SAB$, dar fiindcă $\sphericalangle DAB = \sphericalangle SCB$, aceste cinci unghiuri vor fi egale între ele. Mai mult, $\sphericalangle DSA = \sphericalangle SAC + \sphericalangle SCA$. De aceea $\sphericalangle DAS = \sphericalangle DSA$ şi $AD = DS$. Fie E al doilea punct de intersecţie al dreptei DM cu cercul circumscris, iar

T piciorul perpendicularei duse din punctul S pe dreapta AC. În triunghiurile CST și ADE avem $\sphericalangle ATS = 90°$, $\sphericalangle DAE = 90°$, $\sphericalangle SCA = \sphericalangle DEA$. De aceea $\Delta CST \sim \Delta EDA$ și $\frac{CS}{ST} = \frac{DE}{AD}$ iar $ST = \rho$, $ED = 2r$, $AD = SD$, cum s-a dedus anterior. Prin urmare, $CS \cdot DS = 2r\rho$.

Prin punctele M și S se duce diametrul XY al cercului circumscris. Fără a restrînge generalitatea, vom considera că punctul X este capătul diametrului XY aflat mai aproape de punctul S. Atunci $XS = r - d$ iar $YS = r + d$, prin $d = SM$ înțelegîndu-se distanța dintre centre.

Folosindu-se puterea punctului S față de cercul circumscris, rezultă că $SC \cdot SD = SX \cdot SY$, și, prin urmare, $2r\rho = (r - d)(r + d)$ și $d^2 = r(r - 2\rho)$, adică $d = \sqrt{r(r - 2\rho)}$.

Se poate arăta că, printr-o modificare neesențială a problemei date, se poate deduce formula $d = \sqrt{r(r - 2\rho)}$ (cunoscută sub denumirea de formula lui Euler) pentru un triunghi oarecare.

Toți concurenții care au rezolvat această problemă au calculat direct lungimea segmentului SM folosindu-se de faptul că acesta este situat pe axa de simetrie BT a triunghiului isoscel ABC. Greșeala lor caracteristică a fost examinarea figurii concrete în care ordinea punctelor era $BMST$, în timp ce pentru $\hat{B} > 60°$ ordinea se schimbă în $BSMT$ și apoi în $BSTM$. Rezolvarea care a fost expusă aici este aplicabilă în toate cazurile.

26. Fie sfera Ω care este tangentă la toate dreptele pe care se găsesc muchiile tetraedrului $SABC$. Atunci Ω intersectează în consecință fiecare față a tetraedrului după cercul înscris sau exînscris acesteia. Cercurile care sînt situate pe fețele vecine unei muchii date au în comun punctul în care sfera este tangentă la dreapta pe care se găsește respectiva muchie. Cu alte cuvinte, punctul de tangență cu muchia sau cu prelungirea sa este același pentru două cercuri situate în fețe care au comună acea muchie.

Sînt posibile două cazuri:

1. Punctele de tangență ale sferei sînt situate în interiorul fiecărei muchii. În acest caz toate cercurile sînt tangente la însăși laturile triunghiurilor care constituie fețele tetraedrului, adică sînt cercuri înscrise în aceste triunghiuri.

Sfera tangentă Ω (fig. 20) trebuie să treacă prin punctele P, Q, R de tangență ale cercului înscris în triunghiul ABC cu laturile BC, CA, AB respectiv, și de asemenea prin punctul K de tangență cu latura SA al cercului înscris în triunghiul SAB. Este evident că punctele P, Q, R nu sînt situate pe aceeași dreaptă, iar punctul K

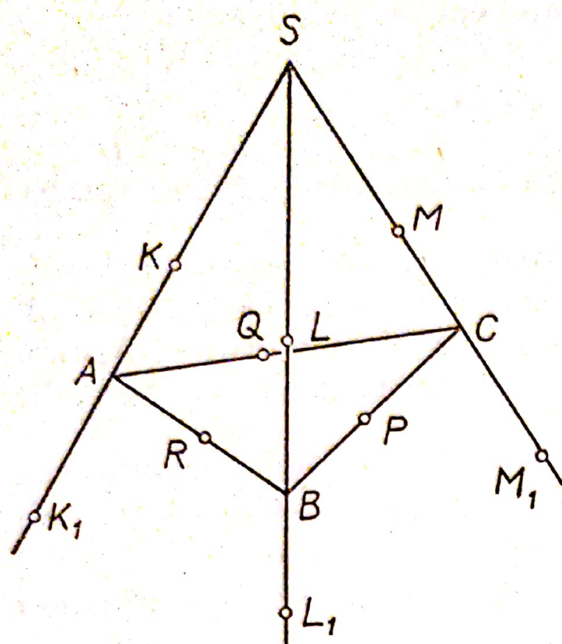


Fig. 20

nu este situat în planul PQR. Prin aceste patru puncte K, P, Q, R nesituate în acelaşi plan trece o sferă şi numai una singură. Astfel, există cel mult o sferă de acest tip.

2. Cel puţin un punct de tangenţă al sferei este situat pe prelungirea muchiei. Fără a restrînge generalitatea, vom considera că punctul K_1 de tangenţă al sferei cu SA este situat dincolo de punctul A (adică A este situat între S şi K_1). Atunci cercul O_1 tangent la dreptele SA, SB şi AB este exînscris triunghiului SAB, nefiind situat de aceeaşi parte cu vîrful S faţă de AB. Din această cauză cercul O_1 este tangent la însăşi muchia AB în punctul R şi la prelungirea muchiei SB dincolo de punctul B în punctul L_1. Din aceleaşi considerații cercul O_3 aflat pe faţa SCA, deoarece este tangent la dreapta SA în punctul K_1, este tangent la însăşi muchia CA în punctul Q (nefiind situat faţă de CA de aceeaşi parte cu S) şi la prelungirea muchiei SC dincolo de C în punctul M_1. În sfîrşit, cercul O_2 aflat pe faţa SBC este tangent la dreptele SB şi SC în punctele L_1 şi M_1 şi la însăşi muchia BC în punctul P. Astfel, această sferă de al doilea tip este tangentă la cele trei muchii care sînt laturi pentru faţa ABC şi la prelungirea muchiilor care ies din vîrful S opus feţei ABC; punctele de tangenţă sînt situate dincolo de A, B, C, pe prelungirile respective.

Repetînd raţionamentele din primul caz, se demonstrează că nu există mai mult de o sferă de al doilea tip, care este tangentă la muchiile feţei date ABC şi la prelungirile muchiilor care ies din vîrful S opus feţei ABC. De aceea numărul total al sferelor de al doilea tip nu este mai mare decît patru.

Se consideră că există toate cele cinci sfere. Se notează astfel muchiile date ale tetraedrului $SABC$:

$$SA = a,\ SB = b,\ SC = c,\ BC = a',\ AC = b',\ AB = c'.$$

Fie K, L, M, P, Q, R punctele de tangenţă ale sferei de primul tip. Atunci $SK = SL = SM$, $AK = AQ = AR$, $BL = BP =$

$= BR$, $CM = CP = CQ$, şi fiindcă $AK + KS = AS$, $BP + PC = BC$ etc., atunci au loc egalităţile

$$a + a' = b + b' = c + c'. \tag{1}$$

Se consideră sfera de al doilea tip care este corespunzătoare feţei ABC. Folosind aceleaşi notaţii, se găsesc relaţiile:

$$SK_1 - AK_1 = SA,\ BP + PC = BC,\ SL_1 - BL_1 = SB,$$
$$AQ + QC = AC,\ SM_1 - CM_1 = SC,\ AR + RB = AB,$$

de unde

$$a - a' = b - b' = c - c'. \tag{2}$$

Comparînd relaţiile (1) cu relaţiile (2), se obţin

$$a = b = c, \quad a' = b' = c'.$$

Dacă se consideră şi sfera de al doilea tip care corespunde feţei SAB, se găseşte că $c' = a = b$.

S-a demonstrat că tetraedrul este regulat. Rămîne să se arate că pentru un tetraedru regulat există cinci astfel de sfere.

Se notează cu O centrul tetraedrului regulat $SABC$. Sfera Ω cu centrul în punctul O, care trece prin mijlocul unei muchii a tetraedrului, va trece şi prin mijloacele celorlalte cinci muchii şi va fi tangentă la acestea. Printr-o omotetie de centru S şi raport $k = 3$ această sferă se transformă într-o altă sferă, care, se constată uşor, este tangentă la toate dreptele pe care se află muchiile tetraedrului şi este o sferă de al doilea tip.

În acest mod se poate construi cîte o sferă de al doilea tip pentru fiecare vîrf al tetraedrului.

Mulţi dintre concurenţi au demonstrat numai a doua parte a problemei. În demonstrarea primei părţi au plecat de la faptul că sferele erau considerate deja în poziţia necesară.

27. Ecuaţia dată este echivalentă cu următorul sistem:

$$\begin{cases} (\sqrt{x^2 - p} + 2\sqrt{x^2 - 1})^2 = x^2, \\ x \geqslant 0. \end{cases} \tag{1}$$

Este evident că din ecuaţia dată rezultă sistemul (1) ca şi faptul că din sistemul (1) rezultă

$$|\sqrt{x^2 - p} + 2\sqrt{x^2 - 1}| = |x|.$$

Deoarece membrul întîi este nenegativ, se poate omite semnul modul, însă a doua relație din sistemul (1) arată că și x este nenegativ, de aceea se poate omite semnul modul și în membrul drept. Se ajunge astfel la ecuația inițială.

Efectuînd transformările care se impun, se găsește sistemul

$$\begin{cases} 4\sqrt{x^2 - p}\cdot\sqrt{x^2 - 1} = p + 4 - 4x^2, \\ x \geqslant 0. \end{cases}$$

Prin raționamente analoage celor precedente, se poate arăta ușor că ultimul sistem este echivalent cu

$$\begin{cases} (4\sqrt{x^2 - p}\cdot\sqrt{x^2 - 1})^2 = (p + 4 - 4x^2)^2, \\ x \geqslant 0, \\ p + 4 - 4x^2 \geqslant 0, \end{cases} \tag{2}$$

iar acesta la rîndul său cu sistemul

$$\begin{cases} 16(x^2-p)(x^2-1)=(p+4-4x^2)^2, \\ x \geqslant 0, \\ p + 4 - 4x^2 \geqslant 0, \\ x^2 - p \geqslant 0, \\ x^2 - 1 \geqslant 0, \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} 8(2 - p)x^2 = (4 - p)^2, \\ x \geqslant 0 \\ x^2 \leqslant \dfrac{p + 4}{4}, \\ x^2 \geqslant p, \\ x^2 \geqslant 1. \end{cases} \tag{3}$$

Dacă se consideră $p = 2$, sistemul (3) nu are soluții, deoarece în acest caz s-ar deduce din prima ecuație că $0 = 4$, ceea ce este absurd. Sistemul nu are soluții nici pentru $p > 2$, deoarece în această situație membrul stîng al primei egalități nu ar fi pozitiv, iar membrul drept ar fi pozitiv, cu excepția cazului cînd $p = 4$ pentru care membrul drept devine nul; nici în acest caz sistemul nu are soluții, deoarece din prima ecuație rezultă $x = 0$ și ultima inegalitate ar fi $0 \geqslant 1$, ceea ce, din nou, este absurd.

Astfel, dacă sistemul are soluții, acestea pot exista numai pentru $p < 2$. În acest caz

$$x^2 = \frac{(4 - p)^2}{8(2 - p)}.$$

În continuare se verifică dacă sînt satisfăcute ultimele trei inegalități ale sistemului în condițiile în care $p < 2$. Prima dintre acestea se reduce la

$$\frac{p(3p-4)}{p-2} \geqslant 0.$$

Înmulțind cu numitorul, care este negativ, se găsește $p(3p-4) \leqslant 0$, adică $0 \leqslant p \leqslant \frac{4}{3}$. Dacă nu este satisfăcută condiția aceasta, sistemul nu are soluții. A doua inegalitate dă $\frac{(3p-4)^2}{8(p-2)} \leqslant 0$ și este totdeauna îndeplinită (în condițiile deja stabilite, bineînțeles). Același lucru se poate spune și despre ultima inegalitate care se reduce la $\frac{p^2}{8(p-2)} \leqslant 0$.

Astfel, pentru $0 \leqslant p \leqslant \frac{4}{3}$ sistemul (3) este echivalent cu

$$\begin{cases} x^2 = \dfrac{(4-p)^2}{8(2-p)}, \\ x \geqslant 0. \end{cases} \qquad (4)$$

Din cauză că am efectuat numai transformări care păstrează echivalența, sistemul (4) este echivalent cu ecuația inițială. Se găsește din acesta că $x = \pm \frac{4-p}{2\sqrt{2(2-p)}}$ și fiindcă $x \geqslant 0$, iar p este totdeauna mai mic decît 2,

$$x = \frac{4-p}{2\sqrt{2(2-p)}}. \qquad (5)$$

R ă s p u n s. Dacă $p < 0$ sau $p > \frac{4}{3}$, ecuația dată nu are rădăcini. Dacă $0 \leqslant p \leqslant \frac{4}{3}$, atunci ecuația are o soluție unică, dată de formula (5).

28. Dacă cea de-a doua latură a unghiului drept trece prin punctul B (sau C), atunci este evident că locul geometric al vîrfului său este sfera O_1 (fig. 21) de diametru AB (respectiv sfera O_2 de diametru AC). Se va demonstra că locul geometric căutat va fi mulțimea punctelor care sînt situate în interiorul sau pe suprafața a cel puțin

uneia dintre aceste sfere, însă care nu sînt puncte interioare ambelor sfere. Această mulțime de puncte se poate scrie $(\bar{k}_1 \cup \bar{k}_2) \setminus (k_1 \cap k_2)$, prin $\bar{k}_i$ înțelegîndu-se mulțimea punctelor situate în interiorul sau

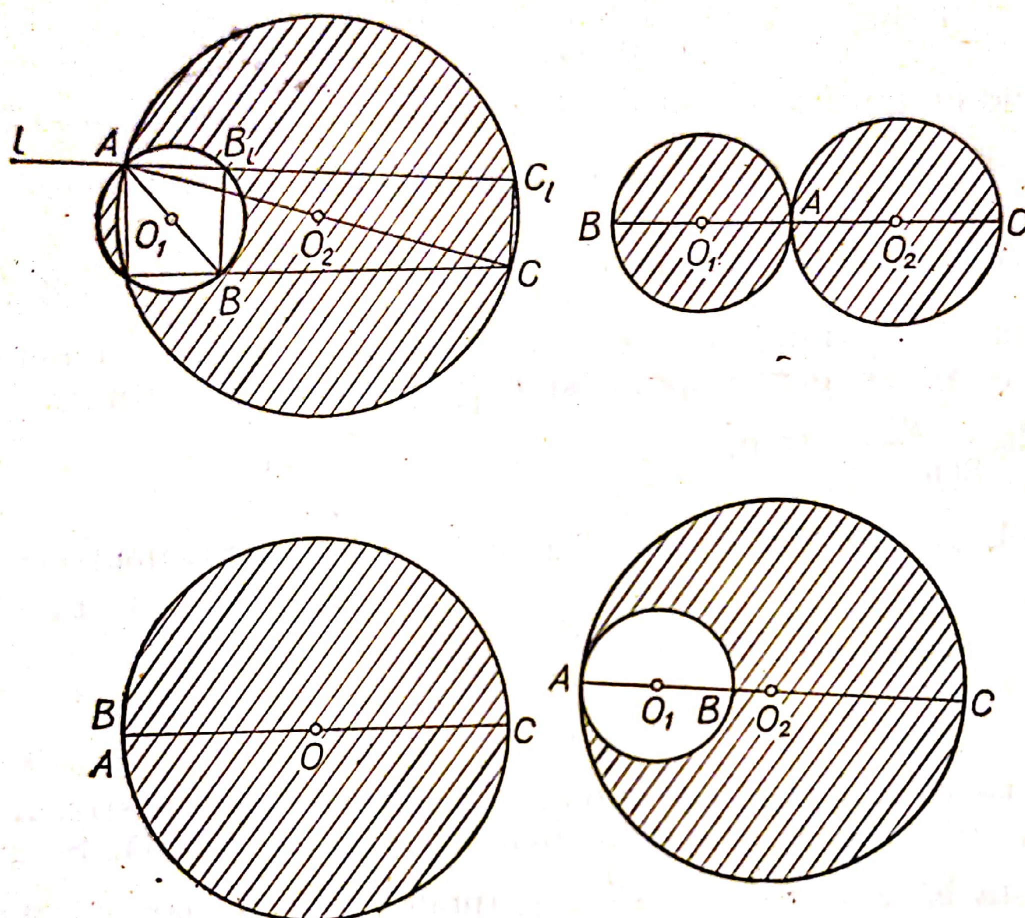


Fig. 21

pe sfera O_i, iar prin k_i mulțimea punctelor situate numai în interiorul sferei O_i.

Pentru a demonstra această afirmație se duce o dreaptă oarecare l prin punctul A și se proiectează segmentul BC în B_lC_l pe această dreaptă. Este evident că punctele segmentului B_lC_l și numai acestea vor fi punctele locului geometric căutat care sînt situate pe dreapta l. Cînd dreapta l se rotește în jurul punctului A, atunci punctele B_l și C_l descriu sferele O_1, respectiv O_2, căci aceste sfere sînt locul geometric al vîrfurilor unghiurilor drepte care trec prin A și B, respectiv prin A și C. Punctele B_l și C_l vor coincide cu punctul A atunci cînd dreapta este tangentă la sfera respectivă. În toate celelalte poziții dreapta l intersectează sferele O_1 și O_2 în punctele B_l, respectiv C_l și în punctul A.

Dreapta l intersectează discul închis $\bar{k}_1$ după segmentul AB_l iar discul închis $\bar{k}_2$ după segmentul AC_l. Segmentul B_lC_l este reuniunea segmentelor AB_l și AC_l dacă punctul A este situat între B_l și C_l, iar în caz contrar este diferența lor. Se vede ușor că în ambele cazuri segmentul B_lC_l este acea porțiune de dreapta l care este acoperită numai de unul dintre segmentele AB_l, AC_l. Pe figură este reprezentată secțiunea domeniului căutat prin planul ABC.

Dacă punctul A se găsește pe dreapta BC, se obține cazul limită pentru cel general. Locul geometric va fi și în acest caz cel găsit: $(\bar{k}_1 \cup \bar{k}_2) \setminus (k_1 \cap k_2)$.

29. Dacă n este impar ($n = 2k + 1$), în poligonul $A_1A_2 \ldots A_n$ se duce bisectoarea unghiului A_1 format de laturile a_1 și a_n. Se arată ușor c ă latura $A_{k+1} A_{k+2}$ este perpendiculară pe bisectoare.

Se proiectează în continuare pe bisectoare liniile frînte $A_1A_2A_3 \ldots$ $\ldots A_{k+1}$ și $A_1A_n A_{n-1} \ldots A_{k+2}$. Proiecțiile acestor linii frînte trebuie să fie aceleași. Pe de altă parte, A_iA_{i+1} și $A_{n-i+2}A_{n-i+1}$ $(i \leqslant k)$ formează unghiuri egale cu bisectoarea. Prin urmare, proiecțiile lui A_iA_{i+1} nu sînt mai mici decît proiecțiile lui $A_{n-i+2}A_{n-i+1}$. De aici rezultă că dacă în succesiunea $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant \ldots \geqslant a_n$ se află cel puțin o inegalitate strictă, aceasta va fi și pentru proiecțiile laturilor respective tot o inegalitate strictă. În aceste condiții lungimea proiecției liniei frînte $A_1A_2A_3 \ldots A_{k+1}$ va fi mai mare decît lungimea proiecției liniei frînte $A_1A_nA_{n-1} \ldots A_{k+2}$, ceea ce nu este posibil. Prin urmare, toate laturile poligonului vor fi egale între ele.

Pentru $n = 2k$ se fac raționamente analoage, proiecția făcîndu-se însă pe o dreaptă perpendiculară pe A_1A_n și deci perpendiculară și pe A_kA_{k+1}.

30. Oricare ar fi y, sistemul de numere $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$ este o soluție. Se vor căuta soluțiile nebanale (acele soluții pentru care cel puțin un x este nenul). Ecuațiile (1) și (5) se scriu sub forma echivalentă

$$x_2 = yx_1 - x_5, \tag{6}$$

$$x_4 = yx_5 - x_1, \tag{7}$$

iar ecuațiile (2), respectiv (4) sub forma

$$x_3 = yx_2 - x_1,$$

$$x_3 = yx_4 - x_5.$$

Se elimină x_2 și x_4 din ultimele două relații cu ajutorul lui (6) și (7), găsindu-se

$$x_3 = (y^2 - 1)x_1 - yx_5, \quad (8)$$

$$x_3 = (y^2 - 1)x_5 - yx_1. \quad (9)$$

Astfel, sistemul de ecuații (1), (2), (4), (5) este echivalent cu sistemul de ecuații (6), (8), (9), (7).

Egalînd între ele expresiile care dau pe x_3 din ecuațiile (8) și (9), se găsește

$$(y^2 - 1)x_1 - yx_5 = (y^2 - 1)x_5 - yx_1$$

sau

$$(y^2 + y - 1)x_1 = (y^2 + y - 1)x_5. \quad (10)$$

Se consideră două cazuri:

1. $y^2 + y - 1 \neq 0$; 2. $y^2 + y - 1 = 0$.

În primul caz, împărțind ambii membri ai ecuației (10) prin $y^2 + y - 1 \neq 0$, se obține $x_1 = x_5$. Permutînd ciclic numerotarea ecuațiilor și a necunoscutelor, se obține analog că toți x_i de indici consecutivi sînt egali între ei, adică $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5$. Reiese deci că $y = 2$ în cazul cînd x_i sînt nenuli. Această soluție se verifică prin înlocuire în sistem.

În cel de-al doilea caz, $y^2 + y - 1 = 0$, adică $y^2 - 1 = -y$. În acest caz ecuațiile (8) și (9) reprezintă de fapt aceeași ecuație care este transcrisă de două ori:

$$x_3 = -y(x_1 + x_5). \quad (11)$$

Se verifică ușor că ecuația (3) este o consecință a ecuațiilor (6), (7) și (11). Într-adevăr,

$$x_2 + x_4 = (y - 1)(x_1 + x_5),$$

$$x_2 + x_4 = -x_3\frac{y-1}{y}. \quad (12)$$

Relația (3) dădea

$$x_2 + x_4 = yx_3.$$

Pentru a demonstra identitatea relațiilor (3) și (12) vom scădea din relația (12) relația (3), obținîndu-se

$$0 = x_2\left(y + \frac{y-1}{y}\right).$$

Aceasta este o identitate. Astfel, dacă y este o rădăcină a ecuației $y^2 + y - 1 = 0$, $y_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$, se pot alege, de exemplu, x_1 și x_5 cu totul arbitrar, x_2 se obține din formula (6), x_4 reiese din formula (7) iar x_3 din formula (11). Ecuațiile (1) — (5) sînt astfel automat satisfăcute, căci pentru astfel de valori ale lui y sînt consecințe ale ecuațiilor (6), (7) și (11).

31. Se înmulțește și se împarte în același timp membrul întîi al identității ce se cere demonstrată cu $2\cos\frac{\pi}{14}$, care nu este nulă $\left(\text{sau cu } 2\sin\frac{\pi}{14}\right)$. Se folosește apoi la numărător formula

$$2\cos x \cos y = \cos(x+y) + \cos(x-y)$$

și se obține

$$\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} = \frac{2\cos\frac{\pi}{14}\left(\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7}\right)}{2\cos\frac{\pi}{14}} =$$

$$= \frac{\cos\frac{3\pi}{14} + \cos\frac{\pi}{14} - \cos\frac{5\pi}{14} - \cos\frac{3\pi}{14} + \cos\frac{7\pi}{14} + \cos\frac{5\pi}{14}}{2\cos\frac{\pi}{14}} =$$

$$= \frac{\cos\frac{\pi}{14}}{2\cos\frac{\pi}{14}} = \frac{1}{2}.$$

32. Este evident că dacă într-o pereche corect indicată intră un element corect indicat, atunci și celălalt element al perechii este corect indicat.

Succesiunea *DAECB* conține patru perechi: *DA*, *AE*, *EC*, *CB*. Două dintre acestea sînt prevăzute corect. Se admite că aceste două perechi au o literă comună. Se formează atunci un triplet în care ordinea este corect prăvăzută. Unde se pot găsi cele două litere corect indicate? Dacă una dintre acestea s-ar găsi în triplet, atunci tot tripletul ar consta din litere corect indicate, ceea ce nu se poate,

deoarece literele corect indicate nu sînt decît două. Dacă ambele litere căutate se găsesc în afara tripletului, atunci toate cele cinci litere sînt puse la locul lor, ceea ce, din nou, nu este posibil.

Astfel, dintre cele patru perechi trebuie alese două care nu au litere comune. Evident, aceasta se poate realiza în trei moduri

$$(DA,\ EC),\ (DA,\ CB),\ (AE,\ CB).$$

Se vede ușor că în fiecare caz una din cele două perechi trebuie să conțină literele corect indicate, iar cealaltă nu. Examinînd cele trei cazuri, se observă că în primul și al treilea caz aceasta se întîmplă într-un singur mod, iar în cel de-al doilea, în două moduri. Se găsesc astfel patru cazuri: *DABEC*, *EDACB*, *DACBE*, *AEDCB*. Examinînd aceste patru cazuri se obține că numai unul dintre acestea satisface condițiile problemei, anume *EDACB*.

33. a) Fie n multiplu de trei. În acest caz n se poate scrie sub forma $n = 3k$ și $2^n - 1 = 2^{3k} - 1 = 8^k - 1$. Diferența a două puteri cu același exponent se divide însă la diferența bazelor, deci $8^k - 1$ se divide la $8 - 1 = 7$. Prin urmare, $2^n - 1$ se divide la 7 dacă n este multiplu de 3.

Fie n nedivizibil la 3, adică $n = 3k + 1$ sau $n = 3k + 2$. Dacă $n = 3k + 1$, se găsește $2^n - 1 = 2^{3k+1} - 1 = 2 \cdot 8^k - 1 = 2(7 + 1)^k - 1$, însă $(7 + 1)^k$ dă la împărțirea prin 7 restul 1 (aceasta rezultă, de exemplu, din binomul lui Newton), $2(7 + 1)^k$ prin împărțirea la 7 dă restul 2. Înseamnă că prin împărțirea la 7 a lui $2^n - 1 = 2(7 + 1)^k - 1$ se obține ca rest 1 și, prin urmare, pentru $n = 3k + 1$ numărul $2^n - 1$ nu se divide cu 7. Dacă $n = 3k + 2$, se găsește $2^n - 1 = 2^{3k+2} - 1 = 4(7 + 1)^k - 1$. Prin împărțirea la 7 se obține restul 3.

În concluzie, $2^n - 1$ se împarte cu 7 dacă și numai dacă n este multiplu de 3.

b) Fie $n = 3k$. Atunci $2^n = 2^{3k} = 7m + 1$; $2^n + 1 = 7m + 2$ care nu se divide la 7.

Fie $n = 3k + 1$, caz în care $2^n + 1 = 2^{3k+1} + 1 = 2 \cdot 2^{3k} + 1 = 2(7m + 1) + 1 = 14m + 3$ care nu se divide la 7.

Pentru $n = 3k + 2$ se găsește că $2^n + 1 = 2^{3k+2} + 1 = 4 \cdot 2^{3k} + 1 = 4(7m + 1) + 1 = 28m + 5$ care de asemenea nu este multiplu de 7. Astfel, pentru nici un n numărul $2^n + 1$ nu se divide la 7.

A l t ă   m e t o d ă   d e   r e z o l v a r e. Fie a_k restul împărțirii lui 2^k la 7. Care este restul a_{k+1} pe care îl dă 2^{k+1} prin împăr-

țirea la 7? Este evident că a trebuie înmulțit cu 2 și scăzut apoi 7, dacă $2a \geqslant 7$. Astfel,

$$\text{dacă } a_k = 1, \quad \text{atunci } a_{k+1} = 2,$$
$$\text{dacă } a_k = 2, \quad \text{atunci } a_{k+1} = 4,$$
$$\text{dacă } a_k = 4, \quad \text{atunci } a_{k+1} = 1.$$

Nu este necesar să se examineze celelalte cazuri. Este clar că șirul resturilor lui 2^n la împărțire prin 7 este 1, 2, 4, 1, 2, 4, ... Se obține astfel ușor rezolvarea problemei.

34. $(a-b)^2 \geqslant 0$, $(b-c)^2 \geqslant 0$, $(c-a)^2 \geqslant 0$, oricare ar fi a, b, c. Din faptul că a, b, c sînt laturi ale triunghiului rezultă că

$$b + c - a > 0, \quad c + a - b > 0, \quad a + b - c > 0.$$

Înseamnă că $(b-c)^2(b+c-a) \geqslant 0$, $(c-a)^2(c+a-b) \geqslant 0$,

$$(a-b)^2(a+b-c) \geqslant 0.$$

Adunînd membru cu membru aceste inegalități, se obține

$$6abc - 2a^2(b + c - a) - 2b^2(a + c - b) - 2c^2(a + b - c) \geqslant 0,$$

de unde

$$a^2(b + c - a) + b^2(a + c - b) + c^2(a + b - c) \leqslant 3abc.$$

Observație. Inegalitatea este valabilă și dacă singurele condiții sînt $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$.

35. Se înscrie un cerc în triunghiul ABC și se duc tangentele la cerc $A_1A_2 \parallel BC$, $B_1B_2 \parallel AC$, $C_1C_2 \parallel AB$ (fig. 22). Fie r raza cercului. Se înscriu cercuri în fiecare dintre noile triunghiuri, notîndu-se razele acestora cu r_1, r_2, r_3, iar înălțimile lor din vîrfurile A, B, C se notează cu h_1, h_2, h_3 respectiv. Aria cercului înscris în triunghiul ABC este $S = \pi r^2$, $r = \dfrac{S_{\Delta ABC}}{p}$, unde $p = \dfrac{a+b+c}{2}$, $S_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

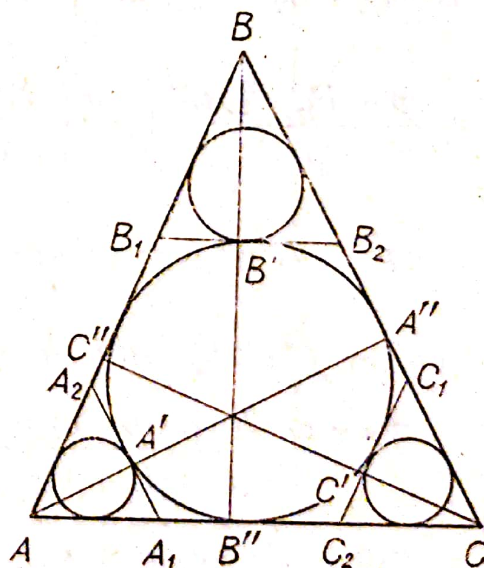


Fig. 22

• Triunghiurile AA_1A_2, BB_1B_2, CC_1C_2 sînt omotetice cu triunghiul ABC iar cercurile care sînt înscrise în acestea

sînt omotetice cu cercul de rază r. Prin urmare $\frac{r_1}{r}=\frac{h_1}{h_a}$, $\frac{r_2}{r}=\frac{h_2}{h_b}$, $\frac{r_3}{r}=\frac{h_3}{h_c}$, unde h_a, h_b şi h_c sînt înălţimile triunghiului ABC care corespund laturilor a, b, şi c respectiv.

Distanţele dintre dreptele din perechile de drepte paralele B_1B_2 şi AC, A_1A_2 şi BC, C_1C_2 şi AB vor fi egale cu $2r$, adică $A'A'' = B'B'' = C'C'' = 2r$. Prin urmare

$$h_1 = h_a - 2r,\ h_2 = h_b - 2r,\ h_3 = h_c - 2r,$$

$$h_a = \frac{2S_{\Delta ABC}}{a},\ h_b = \frac{2S_{\Delta ABC}}{b},\ h_c = \frac{2S_{\Delta ABC}}{c}.$$

De aceea

$$\frac{r_1}{r} = \frac{h_a - 2r}{h_a} = 1 - \frac{2r}{h_a},\ r_1 = r - \frac{2r^2}{h_a},$$

$$r_1 = \frac{S_{\Delta ABC}}{p} - \frac{2aS^2_{\Delta ABC}}{p^2 2S_{\Delta ABC}} = \frac{(p-a)\,S_{\Delta ABC}}{p^2}.$$

În mod analog

$$r_2 = \frac{(p-b)\,S_{\Delta ABC}}{p^2},\ r_3 = \frac{(p-c)\,S_{\Delta ABC}}{p^2},$$

$$S+S_1+S_2+S_3=\pi r^2+\pi r_1^2+\pi r_2^2+\pi r_3^2=\pi\left(\frac{S^2_{\Delta ABC}}{p^2}+\frac{(p-a)^2\,S^2_{\Delta ABC}}{p^4}+\right.$$

$$\left.+\frac{(p-b)^2\,S^2_{\Delta ABC}}{p^4}+\frac{(p-c)^2\,S^2_{\Delta ABC}}{p^4}\right)=\pi\frac{S^2_{\Delta ABC}}{p^4}[p^2+(p-a)^2+$$

$$+(p-b)^2+(p-c)^2]=\frac{\pi\,(p-a)(p-b)(p-c)}{p^4}(p^2+p^2-2ap+$$

$$+a^2+p^2-2bp+b^2+p^2-2cp+c^2)=$$

$$=\frac{\pi(a+c-b)(a+b-c)(b+c-a)}{(a+b+c)^3}(4p^2-4p^2+a^2+b^2+c^2)=$$

$$=\frac{\pi(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)(a^2+b^2+c^2)}{(a+b+c)^3}.$$

36. Se alege un savant la întîmplare. El corespondează cu fiecare dintre ceilalţi 16 savanţi numai pe singură temă. Se va demonstra că el corespondează pe cel puţin una din cele trei teme cu alţi şase savanţi. Presupunînd această ipoteză falsă, înseamnă că el corespondează pe fiecare temă cu cel mult 5 savanţi. Prin urmare, el nu corespundează pe cele trei teme mai mult decît cu 15 savanţi, ceea ce contrazice condiţiile problemei. Fie A această temă. Dacă printre aceşti şase savanţi se găsesc doi care corespondează între ei pe tema A, problema este rezolvată. În situaţia cînd nici unul din aceşti şase savanţi nu corespondează cu vreun alt savant pe tema A, înseamnă că toţi şase corespondează pe celelalte două teme. Un savant oarecare din cei şase corespondează cu ceilalţi cinci. Există o temă pe care el corespondează cu trei din cei cinci, deoarece în caz contrar el ar coresponda numai cu patru savanţi. Fie B această temă. Dacă unul din cei trei savanţi corespondează cu altul din acelaşi grup de trei pe aceeaşi temă B, problema este rezolvată. Dacă toţi trei corespondează între ei pe aceeaşi a treia temă (fie aceasta C), atunci ei constituie tripletul căutat. Deoarece au fost examinate toate cazurile, înseamnă că s-a demonstrat existenţa tripletului în cauză.

37. Toate dreptele sînt in număr de $C_5^2 = 10$. Prin fiecare punct, de exemplu C, trec patru drepte (fig. 23). Prin urmare, din fiecare punct ies cîte şase perpendiculare (după numărul dreptelor care nu trec prin acest punct). Se consideră două puncte arbitrare, de exemplu punctele B şi C. Se numără punctele de intersecţie ale perpendicularelor care trec prin punctul B cu perpendicularele care trec prin punctul C. Perpendicularele duse din punctul B pe dreptele care trec prin punctul C intersectează toate perpendicularele care sînt duse din punctul C. Prin punctul C trec trei drepte care nu trec prin B. Deci se pot duce din B trei perpendi-

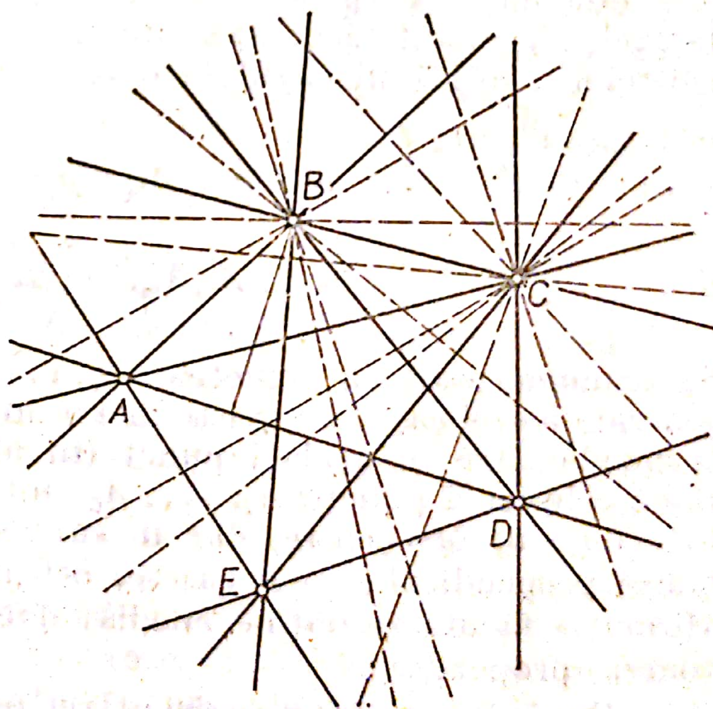


Fig. 23.

culare pe acestea. Ele se intersectează cu perpendicularele duse din punctul C în $3 \cdot 6 = 18$ puncte. Oricare altă perpendiculară dusă din B pe celelalte trei drepte care nu trec prin B, intersectează cinci perpendiculare duse din punctul C, pe cea de-a șasea neintersectînd-o, deoarece este perpendiculară pe aceeași dreaptă, și anume pe AD. Se obțin astfel încă 15 puncte. Prin urmare, perpendicularele care sînt duse din cele două puncte se intersectează în $18 + 15 = 33$ puncte. Cu cele cinci puncte se pot forma zece perechi. Rezultă că nu pot fi mai mult de $33 \cdot 10 = 330$ puncte de intersecție. Unele din aceste puncte coincid însă. Într-adevăr, oricare trei din cele cinci puncte date formează un triunghi. Înălțimile acestui triunghi, care sînt perpendiculare de tipul celor considerate mai sus, se intersectează într-un singur punct. Acest punct a fost numărat de trei ori. Din cauză că există în total $C_5^3 = 10$ astfel de triunghiuri, înseamnă că 10 puncte au fost numărate de trei ori. Rezultă că nu există mai mult de $330 - 30 + 10 = 310$ puncte de intersecție.

Juriul a considerat această problemă ca una combinatorică și nu a cerut să se demonstreze existența unui pentagon cu exact 310 puncte de intersecție a perpendicularelor. Demonstrația de mai jos aparține lui A.B.Sosinski.

Fie punctele date $A_1, A_2, \ldots, A_5$ situate în poziția generală, adică diferite între ele și astfel încît dreptele d_k ce unesc perechea de puncte A_iA_j sînt distincte două cîte două, nu sînt paralele și nici perpendiculare. Perpendicularele p_i duse din punctele A_i pe toate dreptele d_k se intersectează cîte trei într-un punct în „cazul ortocentrelor", adică în cazul în care

$$A_{i_1} \in p_{j_1}, \quad A_{i_2} \in p_{j_2}, \quad A_{j_3} \in p_{j_3}$$

și

$$p_{i_1} \perp A_{i_2}A_{i_3}, \quad p_{i_2} \perp A_{i_1}A_{i_3}, \quad p_{i_3} \perp A_{i_1}A_{i_2}.$$

Se demonstrează că punctele $A_1, \ldots, A_5$ se pot alege în poziție generală astfel ca să nu existe nici o intersecție de trei sau mai multe perpendiculare în același punct (în afară de cazul ortocentrelor). Dacă cele cinci puncte $A_1, \ldots, A_5$ sînt în poziție generală, punctele care nu sînt ortocentre, dar în care se intersectează trei sau mai multe perpendiculare, se găsesc, oricum, în număr finit. De aceea afirmația făcută se obține imediat dacă se folosește succesiv următoarea propoziție:

Dacă H este intersecția a trei perpendiculare p_1, p_2, p_3, însă nu este ortocentru al unui triunghi format de dreptele d_k (fig. 24),

atunci se poate schimba unul dintre punctele A_i cu punctul A'_i, astfel ca:

a) noile perpendiculare p'_1, p'_2, p'_3 să se intersecteze în trei puncte;

b) numărul celorlalte puncte de intersecţie ale perpendicularelor să nu se micşoreze.

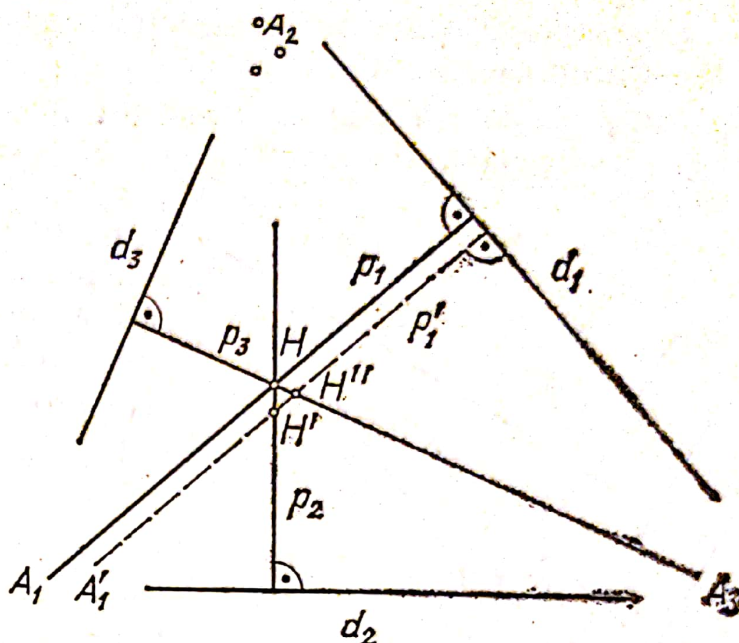


Fig. 24.

În continuare se demonstrează această propoziţie. Notaţia se va face astfel încît perpendiculara p_i să fie dusă din punctul A_i pe dreapta d_i, $i=1, 2, 3$. Fiindcă este exclus cazul ortocentrelor, următoarele trei relaţii nu pot avea loc simultan: $A_1 = d_2 \cap d_3$, $A_2 = d_1 \cap d_3$, $A_3 = d_1 \cap d_2$, prin urmare, cel puţin una nu este adevărată. Considerăm, fără a restrînge generalitatea, că aceea este prima, adică $A_1 \neq d_2 \cap d_3$.

Se poate afirma, că dacă δ este un număr pozitiv arbitrar, se găseşte un punct $A'_1 \neq A_1$ astfel încît este satisfăcută condiţia a) iar $A'_1A_1 < \delta$ (*). De fapt, dacă $A_1 \in d_2$ şi $A_1 \in d_3$, se poate lua drept A'_1 orice punct diferit de A_1 şi satisfăcînd condiţia (*). Dacă $A_1 \in d_2$ (respectiv $A'_1 \in d_3$), drept A'_1 se poate lua orice punct $A'_1 \in d_2$ (respectiv $A'_1 \in d_3$) diferit de A_1 şi satisfăcînd condiţia (*). Atunci dreptele d_1, d_2, d_3 şi perpendicularele p_2, p_3 nu se schimbă, în timp ce perpendiculara p_1 va fi înlocuită de dreapta $p'_1 \parallel d_1$ care trece prin punctul A'_1 şi intersectează pe p_2 şi p_3 respectiv în punctele diferite H' şi H''. Astfel, noile perpendiculare p'_1, $p'_2 \equiv p_2$, $p'_3 \equiv p_3$ se intersectează în trei puncte H, H', H'', adică este îndeplinită condiţia a).

Se poate afirma, că dacă numărul $\delta > 0$ este suficient de mic, se îndeplineşte, de asemenea, şi condiţia b). Considerînd cunoscută noţiunea de continuitate a funcţiei, acest fapt este banal: coordonatele carteziene ale punctelor de intersecţie ale perpendicularelor depind continuu de valorile coordonatelor punctelor A_i (într-o vecinătate a acestor valori). De aceea, pentru $\delta > 0$ suficient de mic, coordonatele acestor puncte de intersecţie variază cu mai puţin decît jumătate din minimul distanţei dintre o pereche de puncte A_i, A_j, de aceea nu se vor confunda între ele nici o pereche de astfel de puncte.

Demonstrația acestei propoziții se poate face fără a folosi explicit noțiunea de continuitate.

Fie r_0 jumătate din distanța minimă între două puncte de intersecție ale perpendicularelor, iar T punctul de intersecție a două perpendiculare oarecare p_i și p_j. Dacă punctul A_1 se înlocuiește cu punctul A_1', perpendicularele p_i și p_j se înlocuiesc cu perpendicularele p_i' și p_j', obținîndu-se un nou punct de intersecție T'. Oricare din noile perpendiculare poate fi secantă, paralelă sau confundată cu cea inițială, fiind astfel posibile șase cazuri dife-rite. Se va examina cel mai complicat din acestea (fig. 25): p_i s-a rotit cu unghiul α, iar p_j este translatată cu distanța r. Este evident că, alegînd pe δ suficient de mic, se pot face pe α și pe r mai mici decît un număr fixat mai înainte. Se găsește în continuare

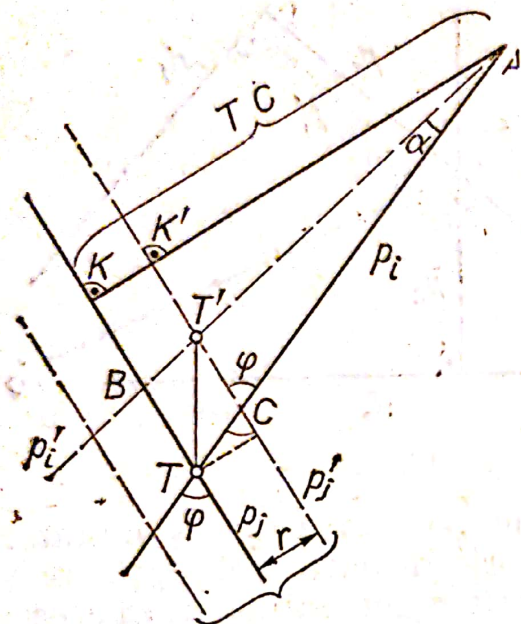


Fig. 25.

$$T'C = (h_0 - r)\frac{\sin\alpha}{\sin\varphi\sin(\alpha+\varphi)} \quad \text{și} \quad TC = \frac{r}{\sin\varphi},$$

unde $\varphi = \measuredangle(p_i, p_j)$, $C = p_j' \cap p_i$ iar h_0 este distanța de la A_i la p_j. Deoarece $\varphi > 0$, pentru α și r suficient de mici se găsește că $T'C < \frac{r_0}{2}$ și $TC < \frac{r_0}{2}$. Din această cauză, pentru δ suficient de mic

$$TT' < TC + T'C < \frac{r_0}{2} + \frac{r_0}{2} = r_0.$$

În celelalte cinci cazuri evaluări mai simple, care se vor omite, conduc la $TT' < r_0$. Astfel, alegînd pe δ suficient de mic, punctele de intersecție se vor deplasa mai puțin decît cu r_0, deci nu vor putea să coincidă, fiind îndeplinită în consecință condiția b). Propoziția este demonstrată.

38. Problema se va rezolva pentru cazul general.

Se consideră punctul oarecare D_1 situat în interiorul triunghiului ABC (fig. 26). Se duc dreptele $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$ care intersectează planele fețelor opuse ale tetraedrului în punctele A_1, B_1 și C_1 respectiv. Se duc în triunghiul ABC dreptele AD_1, BD_1, CD_1 care intersectează laturile care li se opun în punctele A', B', C'. Dreapta A_1D trece prin punctul A', fiindcă A_1D este situată în planul A_1BC și $AA_1 \parallel D_1D$. Se justifică analog faptul că dreapta B_1D trece prin punctul B', iar dreapta C_1D trece prin punctul C'.

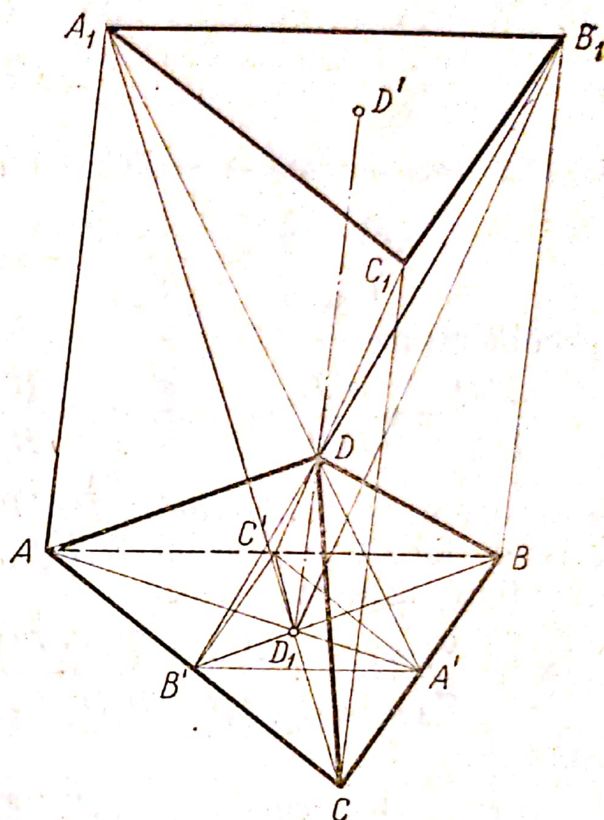


Fig. 26

Se pun în vîrfurile triunghiului ABC greutățile x, y, z astfel ca centrul lor de greutate să fie în punctul D_1. De exemplu

$$\frac{AB'}{B'C} = \frac{z}{x}, \quad \frac{CA'}{A'B} = \frac{y}{z},$$

$$\frac{BC'}{C'A} = \frac{x}{y}.$$

Este suficient pentru aceasta să fie îndeplinite condițiile*:

$$x = B'C, \quad y = \frac{CA'}{A'B} \cdot AB', \quad z = AB'.$$

Se găsește

$$\frac{S_{\Delta AC'B'}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{AB' \cdot AC'}{AB \cdot AC} = \frac{yz}{(x + y)(x + z)}.$$

În mod analog

$$\frac{S_{\Delta BC'A'}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{xz}{(y + x)(y + z)} \text{ și } \frac{S_{\Delta A'B'C'}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{xy}{(z + x)(z + y)}.$$

---

* În continuare se consideră cunoscut faptul că centrul de greutate al unui sistem de mase nu se schimbă, dacă o parte din acestea se înlocuiesc cu o masă egală cu suma lor, așezată în centrul de greutate al acestora. Pentru cazul a trei mase se obține identitatea (cu notațiile problemei) $AC' \cdot BA' \cdot CB' = BC' \cdot CA' \cdot AB'$.

În acest caz

$$\frac{S_{\Delta A'B'C'}}{S_{\Delta ABC}} = 1 - \frac{xy}{(x+z)(y+z)} - \frac{xz}{(x+y)(z+y)} -$$

$$- \frac{yz}{(y+x)(z+x)} = \frac{2xyz}{(x+y)(x+z)(y+z)}.$$

Fiindcă tetraedrele $ABCD$ şi $A'B'C'D'$ au aceeaşi înălţime, rezultă

$$\frac{V_{A'B'C'D}}{V_{ABCD}} = \frac{S_{\Delta A'B'C'}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{2xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}.$$

În continuare

$$\frac{A'D}{DA_1} = \frac{A'D}{D_1A} = \frac{x}{y+z}, \quad \frac{B'D}{B_1D} = \frac{y}{x+z}, \quad \frac{C'D}{C_1D} = \frac{z}{x+y}.$$

Deoarece unghiurile triedre $DA'B'C'$ şi $DA_1B_1C_1$ sînt egale, volumele tetraedrelor $A'B'C'D$ şi $A_1B_1C_1D$ sînt proporţionale cu produsul muchiilor laterale, adică

$$\frac{V_{A'B'C'D}}{V_{A_1B_1C_1D}} = \frac{A'D \cdot B'D \cdot C'D}{A_1D \cdot B_1D \cdot C_1D} = \frac{xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)},$$

însă

$$\frac{V_{A'B'C'D}}{V_{ABCD}} = \frac{2xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)} = 2\frac{V_{A'B'C'D}}{V_{A_1B_1C_1D}}$$

sau $V_{A_1B_1C_1D} = 2V_{ABCD}$. Schimbăm în triunghiul ABC greutăţile astfel: în punctul A' greutatea $\frac{y+z}{2}$, în punctul B' greutatea $\frac{x+z}{2}$ iar în punctul C' greutatea $\frac{x+y}{2}$. Centrul de greutate se păstrează astfel tot în punctul D_1; după aceea punem în vîrfurile A_1, B_1 şi C_1 respectiv greutăţile $\frac{x}{2}$, $\frac{y}{2}$ şi $\frac{z}{2}$. Centrul de greutate al fiecăreia dintre perechile de puncte (A_1, A'), (B_1, B'), (C_1, C') va fi situat în punctul D, aşa că

$$\frac{A_1D}{DA'} = \frac{AD_1}{D_1A'} = \frac{y+z}{x} = \frac{\frac{y+z}{2}}{\frac{x}{2}},$$

şi analog pentru celelalte perechi. Aceasta înseamnă că şi centrul total de greutate va fi situat în D. Pe de altă parte, centrul de greutate al punctelor A', B', C' este situat în punctul D_1, iar masa sa este $x + y + z$. Centrul de greutate al punctelor A_1, B_1, C_1 este situat în planul $A_1B_1C_1$ şi pe dreapta DD_1, adică în punctul D_1, iar masa sa este $\frac{x+y+z}{2}$. Prin urmare, $\frac{D_1D}{DD'} = \frac{1}{2}$ şi $\frac{D'D_1}{D'D} = \frac{3}{2}$.

Aceasta înseamnă că şi raportul înălţimilor, duse din punctele D_1 şi D pe planul $A_1B_1C_1$ este $\frac{3}{2}$. Tetraedrele $A_1B_1C_1D$ şi $A_1B_1C_1D_1$ au însă aceeaşi bază $A_1B_1C_1$. Rezultă că $\frac{V_{A_1B_1C_1D_1}}{V_{A_1B_1C_1D}} = \frac{3}{2}$, însă fiindcă $V_{A_1B_1C_1D} = 2V_{ABCD}$, va avea loc egalitatea $V_{A_1B_1C_1D_1} = 3V_{ABCD}$.

39. Inegalitatea dată

$$2\cos x \leqslant \left|\sqrt{1+\sin 2x} - \sqrt{1-\sin 2x}\right| \leqslant \sqrt{2}$$

se scrie sub forma sistemului

$$\begin{cases} 2\cos x \leqslant \left|\sqrt{1+\sin 2x} - \sqrt{1-\sin 2x}\right|, \\ \left|\sqrt{1+\sin 2x} - \sqrt{1-\sin 2x}\right| \leqslant \sqrt{2}. \end{cases}$$

Se studiază prima inegalitate a sistemului. Fiindcă membrul drept al inegalităţii este totdeauna nenegativ, în domeniul soluţiilor vor intra toate valorile lui x pentru care $\cos x \leqslant 0$. Rezultă că toate valorile lui x pentru care $\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3}{2}\pi$ sînt soluţii. Deci este suficient să căutăm soluţiile pentru care $\cos x > 0$. În acest caz ambii membri ai inegalităţii sînt pozitivi. Este posibilă deci ridicarea lor la pătrat:

$$4\cos^2 x \leqslant 1 + \sin 2x - 2\sqrt{1-\sin^2 2x} + 1 - \sin 2x.$$

Se obţine, în continuare,

$$4\cos^2 x \leqslant 2 - 2\sqrt{\cos^2 2x}, \qquad 2\cos^2 x \leqslant 1 - |\cos 2x|,$$

$$|\cos 2x| \leqslant 1 - 2\cos^2 x = -(2\cos^2 x - 1) = -\cos 2x.$$

Această inegalitate este satisfăcută pentru $\cos 2x \leqslant 0$. De aici rezultă

$$\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leqslant 2x \leqslant \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \text{ sau } \frac{\pi}{4} + k\pi \leqslant x \leqslant \frac{3}{4}\pi + k\pi,$$

adică pentru $\cos x \geqslant 0$, x poate lua valorile $\frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ și $\frac{3}{2}\pi \leqslant$ $\leqslant x \leqslant \frac{7}{4}\pi$. Împreună cu acele valori ale lui x pentru care $\cos x \leqslant 0$, se găsește că prima inegalitate a sistemului este satisfăcută pentru $\frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{7}{4}\pi$.

Considerîndu-se cea de-a doua inegalitate a sistemului, ai cărei membri sînt amîndoi pozitivi, aceasta se ridică la pătrat:

$$1 + \sin 2x - 2\sqrt{1 - \sin^2 2x} + 1 - \sin 2x \leqslant 2;$$

$-2\sqrt{\cos^2 2x} \leqslant 0$ pentru orice valoare a lui x, deci soluțiile sistemului sînt

$$\frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{7}{4}\pi.$$

40. Fie (x_1, x_2, x_3) o soluție a sistemului, iar $|x_1| \geqslant |x_2| \geqslant |x_3|$. Oricare alt caz se reduce la cel considerat cu ajutorul unei permutări a indicilor 1, 2, 3 și a ecuațiilor din sistem. Dacă $|x_1| = 0$, atunci $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Fie $|x_1| \neq 0$; se obține

$$a_{11} + a_{12}\frac{x_2}{x_1} + a_{13}\frac{x_3}{x_1} \geqslant a_{11} - |a_{12}|\frac{|x_2|}{|x_1|} - |a_{13}|\frac{|x_3|}{|x_1|} \geqslant$$

$$\geqslant a_{11} - |a_{12}| - |a_{13}| = a_{11} + a_{12} + a_{13} > 0.$$

Se deduce de aici și din prima ecuație că

$$0 = |a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3| = |x_1|\left|a_{11} + a_{12}\frac{x_2}{x_1} + a_{13}\frac{x_3}{x_1}\right| > 0.$$

Contradicția obținută arată că este necesar ca $|x_1| = 0$, ceea ce se cerea. Această soluție se generalizează ușor pentru cazul unui sistem analog cu n ecuații și n necunoscute.

41. Fie planul situat la distanța x de CD (fig. 27). Atunci aria secțiunii (care este un paralelogram fiindcă $ML \parallel AB \parallel EN$ și $NL \parallel CD \parallel ME$) este dată de

$$ML \cdot ME \cdot \sin \omega =$$

$$= \frac{ax}{d} \cdot \frac{b(d-x)}{d} \sin \omega;$$

$$v_1 = \int_0^x \frac{ax}{d} \cdot \frac{b(d-x)}{d} \sin \omega \, dx =$$

$$= \left(\frac{abx^2}{2d} - \frac{abx^3}{3d^2}\right) \sin \omega.$$

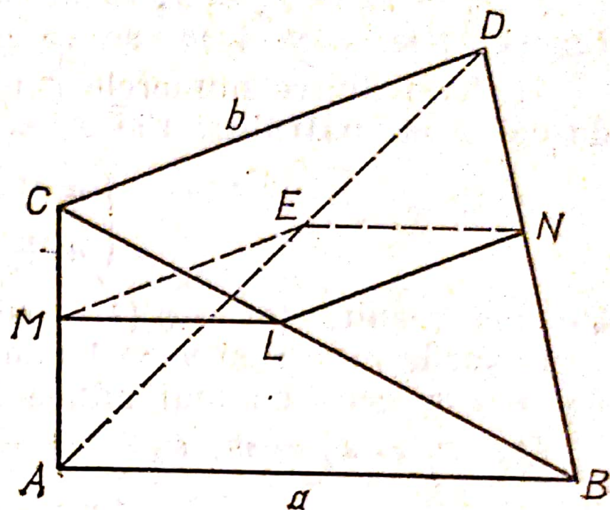


Fig. 27

În mod analog

$$v_2 = \left(\frac{aby^2}{2d} - \frac{aby^3}{3d^2}\right) \sin \omega,$$

unde s-a notat cu y distanța de la P la AB. Rezultă

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{3dy^2 - 2y^3}{3dx^2 - 2x^3}.$$

Dar $x = \dfrac{d}{k+1}$, $y = \dfrac{dk}{k+1}$; deci

$$\frac{v_2}{v_1} = k^2 \frac{3 - \dfrac{2k}{k+1}}{3 - \dfrac{2}{k+1}} = k^2 \frac{k+3}{3k+1}.$$

42. Se notează $x_1 x_2 x_3 x_4 = p$. Sistemul de ecuații se scrie în acest caz sub forma

$$x_i + \frac{p}{x_i} = 2, \qquad i = 1, 2, 3, 4.$$

Cazul cînd unul dintre numerele căutate este nul conduce la o contradicție. Într-adevăr, dacă se înlocuiește x_1 cu 0, se obține

$$x_2 x_3 x_4 = 2, \qquad x_2 = x_3 = x_4 = 2.$$

Astfel, toţi x_i sînt rădăcini pentru aceeaşi ecuaţie de gradul al doilea: $x_i^2 - 2x_i + p = 0$. De aceea printre rădăcini se pot găsi numai două diferite între ele. Se vor examina trei cazuri:

I. $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = m$, $m + m^3 = 2$. Pe baza monotoniei funcţiei $f(m) = m + m^3$ se va găsi o singură soluţie reală $m = 1$.

II. Trei dintre numerele căutate sînt egale între ele şi diferite de cel de-al patrulea. Fie $x_1 = x_2 = x_3 = m$ şi $x_4 = n$,

$$\begin{cases} m + m^2n = 2, \\ n + m^3 = 2. \end{cases}$$

De aici rezultă $(m - n)(1 - m^2) = 0$.

Cazurile $m = n$ şi $m = 1$ conduc la cel cunoscut. Cazul $m = -1$ dă $n = 3$, ceea ce mai aduce încă patru soluţii.

III. $x_1 = x_2 = m$, $x_3 = x_4 = n$,

$$\begin{cases} m + mn^2 = 2, \\ n + nm^2 = 2. \end{cases}$$

Se deduce de aici că $(m - n)(1 - mn) = 0$. Cazul $m = n$ nu aduce soluţii noi. Fie $mn = 1$. În acest caz $m + n = 2$, $m = n = 1$. Nu se obţin soluţii noi.

Răspuns. 1) $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$.

2, 3, 4, 5) Unul din x_i este 3, ceilalţi sînt egali cu -1.

43. Sînt date: $AA' \parallel MQ \parallel B'R \parallel PP' \perp OB$ (fig. 28), $MP \parallel$ $\parallel BB' \parallel QQ' \parallel A'S \perp AO$.

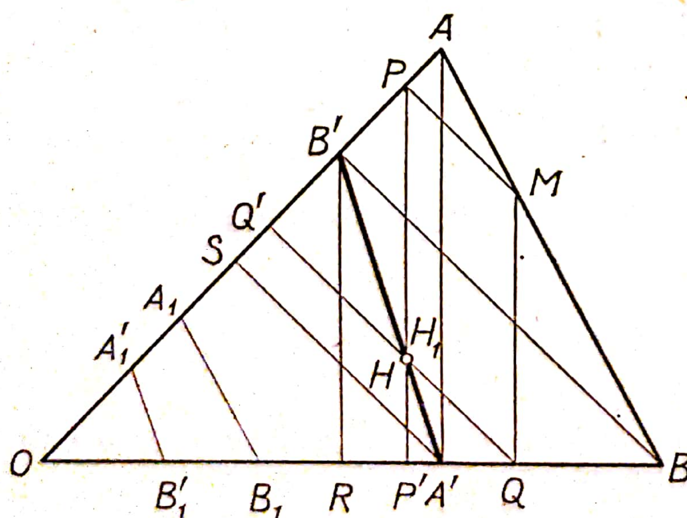


Fig. 28

a) Fie $\dfrac{AM}{MB} = k$. Astfel, fiindcă $\Delta AA'B \sim \Delta MQB$, $\dfrac{A'Q}{QB} = k$.

Ca o consecinţă a teoremei lui Tales, rezultă $\dfrac{SQ'}{Q'B'} = \dfrac{A'Q}{QB} = k$ şi, în mod analog, $\dfrac{A'P'}{P'R} = k$.

Se demonstrează că locul geometric al punctelor H (H este punctul de intersecţie a înălţimilor PP' şi QQ', ortocentrul triunghiului OPQ) este segmentul de dreaptă $A'B'$. Prin punctul P' al segmentului $A'R$ $\left(\frac{A'P'}{P'R} = k\right)$ se duce perpendiculara pe acest segment. $\Delta RB'A' \sim \Delta P'H_1A'$ (H_1 este punctul de intersecţie al acestei perpendiculare cu segmentul $A'B'$). În continuare $\frac{A'H_1}{H_1B'} = k$, $\frac{SQ'}{Q'B'} = k$, adică $\Delta SA'B' \sim \Delta Q'H_1B'$ (au două laturi proporţionale, iar unghiurile cuprinse între acestea sînt egale). Prin urmare, H_1Q' coincide cu înălţimea triunghiului OPQ, dusă pe OP, ceea ce înseamnă că $H \equiv H_1$, ceea ce trebuia demonstrat.

b) La punctul a) s-a demonstrat că segmentul care uneşte picioarele A' şi B' ale înălţimilor triunghiului AOB este locul geometric al punctelor H, în cazul în care punctul M parcurge segmentul AB.

Se consideră triunghiul A_1OB_1 ($A_1B_1 \parallel AB$). Este evident că acesta este triunghi asemenea cu triunghiul AOB şi de aceea segmentul $A_1'B_1'$ este omotetic cu segmentul $A'B'$ cu coeficientul de omotetie egal cu $\frac{OA_1}{OA}$, iar centrul de omotetie este O.

Se obţine, din considerente de continuitate, că atunci cînd punctul M parcurge interiorul triunghiului AOB, punctul H parcurge interiorul triunghiului $A'B'O$.

Observaţie. La punctul a) s-a demonstrat că punctul H este situat pe $A'B'$. Se demonstrează uşor că dacă $\frac{A'H}{HB'} = k$, atunci $\frac{AM}{MB} = k$, adică numai punctele segmentului $A\ B'$ satisfac această condiţie. Dacă punctul H este luat în afara dreptei $A'B'$, punctul M va fi situat în afara dreptei AB.

Faptul că unghiurile OAB şi OBA sînt ascuţite sau obtuze nu joacă nici un rol. Dacă mărimea unghiului AOB depăşeşte 90°, figura va fi alta, iar raţionamentele care au fost făcute îşi pierd valabilitatea pentru acest caz.

44. Se presupune că printr-un punct oarecare A al sistemului dat trec diametrele AB, AC şi AD. Punctele B, C şi D sînt situate în acest caz pe cercul K_1 care are centrul în punctul A şi raza egală cu d. Toate celelalte puncte ale sistemului sînt situate fie pe cercul K_1, fie sînt puncte interioare discului mărginit de cercul K_1. Din cauză că fiecare din distanţele BC, BD şi CD nu este mai mare decît d, punctele B, C şi D se găsesc pe un arc al cercului K_1, capabil de un unghi care nu depăşeşte 60°. Fie punctul C situat în interiorul arcu-

lui BD, în condiția $\widehat{BD} \leqslant 60°$. Fie K_2 cercul de centru C și rază $CA = d$. Toate diametrele sistemului dat de puncte care trec prin punctul C trebuie să aibă extremitățile pe arcul de cerc MN al cercului K_2, situat în interiorul discului K_1. Din cauză că orice punct al arcului MN, cu excepția punctului A, se găsește față de punctele B și D la o distanță mai mare decît d, rezultă că CA este singurul diametru care trece prin C.

Astfel s-a stabilit că pentru sistemul dat de n puncte ($n \geqslant 3$) există numai două posibilități: sau în sistem se găsește un punct prin care nu trece mai mult de un singur diametru, sau prin fiecare punct al sistemului trec exact două diametre. Este ușor să se demonstreze în continuare teorema căutată folosind metoda inducției matematice.

Pentru $n = 3$ teorema este evident adevărată. Se va arăta că din valabilitatea teoremei pentru k puncte (k număr natural și $k \geqslant 3$) rezultă valabilitatea acesteia și pentru $k + 1$ puncte. Considerăm sistemul format din $k + 1$ puncte $A_1, A_2, \ldots, A_{k+1}$ care are mai mult de un diametru. Dacă în acest sistem există un punct, fie acesta A_1, din care nu iese nici un diametru sau din care iese un singur diametru, numărul de diametre în sistemul de puncte $A_1, \ldots, A_{k+1}$ este cel mult cu o unitate mai mare decît numărul diametrelor din sistemul de puncte $A_2, \ldots, A_{k+1}$, adică nu depășește pe $k + 1$. Dacă nu există un astfel de punct, atunci din fiecare punct A_i ies exact două diametre și astfel numărul lor este $\frac{2(k+1)}{2} = k + 1$.

Numărul maxim n de diametre se obține, de exemplu, într-un poligon regulat avînd $n = 2k + 1$ laturi și de asemenea în cazul în care unul din puncte este centrul unui arc de cerc de rază d, iar celelalte $n - 1$ puncte sînt situate pe acest arc, unghiul între razele duse la punctele extreme fiind de 60°.

45. Se notează numărul concurenților care au rezolvat numai problema B prin B, numărul celor care au rezolvat problema A și problema B prin AB etc. Condițiile problemei se exprimă prin patru ecuații:

$$A + B + C + AB + BC + AC + ABC = 25, \quad (1)$$

$$B + BC = 2(C + BC), \quad (2)$$

$$A - 1 = AB + AC + ABC, \quad (3)$$

$$A + B + C = 2(B + C). \quad (4)$$

Se observă că A, B, C, AB, BC, AC, ABC sînt, evident, numere întregi nenegative. Se va rezolva sistemul. Eliminînd pe ABC între ecuațiile (1) și (3), se obține

$$2A + B + C + BC - 1 = 25. \tag{5}$$

În continuare se găsește

$$BC = B - 2C, \tag{2'}$$

$$A = B + C. \tag{4'}$$

Dacă din ecuația (5) se scade ecuația (2') cît și dublul ecuației (4'), se găsește $4B + C = 26$, iar apoi

$$C = 26 - 4B, \tag{6}$$

$$BC = B - (52 - 8B) = 9B - 52. \tag{7}$$

Fiindcă B, C și BC sînt numere întregi nenegative, din (6) rezultă că $B \leqslant 6$, iar din (7) că $B \geqslant 6$. Aceasta înseamnă că dacă problema se poate rezolva, atunci $B = 6$.

Rezolvarea problemei este posibilă, fiindcă există cel puțin valorile $A = 8$, $B = 6$, $C = 2$, $AB = 3$, $AC = 2$, $BC = 2$, $ABC = 2$, care satisfac condițiile problemei.

În consecință, 6 elevi au rezolvat numai problema B.

46. Fiindcă α, β și γ sînt unghiurile triunghiului, înseamnă că

$$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \operatorname{ctg}\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}.$$

Egalitatea din enunțul problemei se poate pune sub forma

$$a\left(1 - \operatorname{tg}\alpha\frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}\right) + b\left(1 - \operatorname{tg}\beta\frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}\right) = 0. \tag{1}$$

Înmulţind egalitatea (1) cu $\sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \alpha \cos \beta$, se găseşte

$$a \cos \beta \left(\sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \alpha - \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \alpha \right) +$$

$$+ b \cos \alpha \left(\sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \beta - \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \beta \right) = 0. \qquad (2)$$

Înlocuind expresiile din paranteze prin sinusul diferenţei de unghiuri, se poate scrie

$$\sin \frac{\beta-\alpha}{2} (a \cos \beta - b \cos \alpha) = 0. \qquad (3)$$

De aici rezultă că sau $\sin \frac{\beta-\alpha}{2} = 0$ şi în acest caz $\alpha = \beta$, adică triunghiul este isoscel, sau expresia din paranteză este nulă, adică

$$a \cos \beta = b \cos \alpha. \qquad (4)$$

Din teorema sinusurilor se obţine

$$a \sin \beta = b \sin \alpha. \qquad (5)$$

Prin ridicarea la pătrat a ambilor membri ai egalităţilor (4) şi (5) şi adunînd apoi aceste egalităţi, se găseşte

$$a^2(\cos^2 \beta + \sin^2 \beta) = b^2(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha), \qquad (6)$$

adică $a = b$, deci în condiţiile problemei triunghiul este isoscel.

47. Tetraedrului dat $ABCD$ i se circumscrie o sferă. Prin vîrfurile A, B, C, D ale tetraedrului se duc planele tangente la sferă, obţinîndu-se un nou tetraedru $A'B'C'D'$ omotetic cu cel dat, avînd raportul de omotetie $k = -3$. Suma distanţelor la feţele tetraedrului $A'B'C'D'$ de la orice punct situat în interiorul sau pe feţele sale este constantă şi egală cu înălţimea sa, sau cu volumul său împărţit prin o treime din aria unei feţe.

Fie punctul M situat în afara tetraedrului $A'B'C'D'$. Se vor considera patru tetraedre avînd pe M ca vîrf şi drept feţe cele patru feţe ale tetraedrului $A'B'C'D'$. În acest caz tetraedrele $MA'B'C'$, $MA'B'D'$, $MA'C'D'$ şi $MB'C'D'$ se întretaie. Nu este greu de observat că tetraedrul $A'B'C'D'$ este conţinut în reuniunea lor. Într-adevăr, fie N un punct interior oarecare al tetraedrului

$A'B'C'D'$. Se poate arăta că acesta aparţine cel puţin unuia din cele patru tetraedre. Se duce dreapta MN care intersectează cel puţin două din feţele tetraedrului. Considerăm acea faţă (sau una din acele feţe) pe care este situat punctul de intersecţie cel mai îndepărtat. Se consideră tetraedrul avînd ca vîrfuri punctul M şi vîrfurile acestei feţe. Punctul N va fi punct interior pentru acest tetraedru. Din această cauză suma volumelor acestor tetraedre este mai mare decît volumul tetraedrului $A'B'C'D'$ şi, prin urmare, suma distanţelor de la punctul M la feţele tetraedrului $A'B'C'D'$ este mai mare decît înălţimea sa, iar suma oblicelor MA, MB, MC, MD cu atît mai mult va fi mai mare.

48. Fiindcă $x \neq \frac{\lambda\pi}{2^k}$, λ şi k fiind numere întregi, înseamnă că $\sin 2^k x \neq 0$, iar $\operatorname{ctg} 2^k x$ şi $\operatorname{ctg} 2^{k-1} x$ există. Însă

$$\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{1}{\sin 2\alpha}.$$

Identitatea dată se va demonstra prin inducţie completă. Pentru $n = 1$ egalitatea este verificată, adică

$$\frac{1}{\sin 2x} = \operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} 2x.$$

Se face presupunerea că această egalitate are loc pentru $n = m$, adică

$$\frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 4x} + \dots + \frac{1}{\sin 2^m x} = \operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} 2^m x.$$

Se demonstrează apoi valabilitatea identităţii pentru $n = m + 1$:

$$\frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 4x} + \dots + \frac{1}{\sin 2^m x} + \frac{1}{\sin 2^{m+1} x} =$$

$$= (\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} 2^m x) + (\operatorname{ctg} 2^m x - \operatorname{ctg} 2^{m+1} x) = \operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} 2^{m+1} x.$$

Rezultă din demonstraţia dată că egalitatea în cauză este valabilă pentru orice valori naturale ale lui n.

Toate transformările sînt admise deoarece prin ipoteză s-au impus condiţii restrictive asupra lui x.

49. Fiindcă sistemul considerat nu se schimbă dacă se înlocuiește indicele i cu indicele k și reciproc, se poate considera că $a_1 > a_2 > a_3 > a_4$. În acest caz

$$(a_1 - a_2)x_2 + (a_1 - a_3)x_3 + (a_1 - a_4)x_4 = 1, \quad (1)$$
$$(a_1 - a_2)x_1 + (a_2 - a_3)x_3 + (a_2 - a_4)x_4 = 1, \quad (2)$$
$$(a_1 - a_3)x_1 + (a_2 - a_3)x_2 + (a_3 - a_4)x_4 = 1, \quad (3)$$
$$(a_1 - a_4)x_1 + (a_2 - a_4)x_2 + (a_3 - a_4)x_3 = 1. \quad (4)$$

Din (1) se scade (2), din (2) se scade (3), iar din (3) se scade (4). Se obține

$$(a_1 - a_2)(x_2 + x_3 + x_4 - x_1) = 0,$$
$$(a_2 - a_3)(-x_1 - x_2 + x_3 + x_4) = 0,$$
$$(a_3 - a_4)(-x_1 - x_2 - x_3 + x_4) = 0,$$

și sistemul dat se scrie sub forma echivalentă:

$$\begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 = x_1, & (5) \\ x_1 + x_2 = x_3 + x_4, & (6) \\ x_1 + x_2 + x_3 = x_4, & (7) \\ (a_1 - a_4)x_1 + (a_2 - a_4)x_2 + (a_3 - a_4)x_3 = 1. \end{cases}$$

Din ecuațiile (5), (6) și (7) rezultă $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ și $x_1 = x_4$. În acest caz se obține din (4) $x_1 = \dfrac{1}{a_1 - a_4}$.

Verificarea arată că dacă $a_1 > a_2 > a_3 > a_4$, atunci într-adevăr $x_1 = x_4 = \dfrac{1}{a_1 - a_4}$, iar $x_2 = x_3 = 0$.

50. Ariile triunghiurilor care au un unghi egal sînt în același raport ca și produsul laturilor care formează acel unghi (fig. 29). De aceea

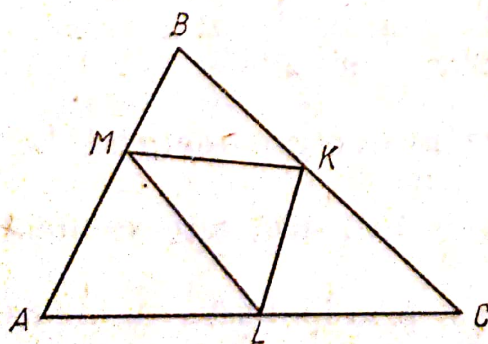


Fig. 29

$$\frac{S_{\Delta MBK}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{MB \cdot BK}{AB \cdot BC}, \quad (1)$$

$$\frac{S_{\Delta MAL}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{AM \cdot AL}{AB \cdot AC}, \quad (2)$$

$$\frac{S_{\Delta KLC}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{KC \cdot LC}{BC \cdot AC}. \quad (3)$$

Se presupune că

$$\frac{S_{\Delta MBK}}{S_{\Delta ABC}} > \frac{1}{4}, \quad \frac{S_{\Delta MAL}}{S_{\Delta ABC}} > \frac{1}{4}, \quad \frac{S_{\Delta KLC}}{S_{\Delta ABC}} > \frac{1}{4}.$$

Înmulţind membru cu membru aceste egalităţi şi folosind (1), (2) şi (3), se găseşte

$$\frac{BM \cdot BK \cdot AM \cdot AL \cdot CK \cdot CL}{AB \cdot BC \cdot AB \cdot AC \cdot BC \cdot AC} > \frac{1}{64}$$

sau

$$\frac{BM \cdot AM}{AB^2} \cdot \frac{BK \cdot CK}{BC^2} \cdot \frac{AL \cdot CL}{AC^2} > \frac{1}{64}.$$

Pe de altă parte, însă,

$$\sqrt{AM \cdot BM} \leqslant \frac{AM + BM}{2} = \frac{AB}{2} \text{ şi } \frac{AM \cdot BM}{AB^2} \leqslant \frac{1}{4}.$$

În mod analog

$$\frac{BK \cdot CK}{BC^2} \leqslant \frac{1}{4}, \quad \frac{AL \cdot LC}{AC^2} \leqslant \frac{1}{4}.$$

Înmulţind termen cu termen aceste inegalităţi, se obţine

$$\frac{AM \cdot BM}{AB^2} \cdot \frac{BK \cdot CK}{BC^2} \cdot \frac{AL \cdot CL}{AC^2} \leqslant \frac{1}{64}.$$

S-a ajuns astfel la o contradicţie. Din această cauză, se găseşte un triunghi de arie care nu depăşeşte $\frac{1}{4} S_{\Delta ABC}$.

51. Triunghiului ascuţitunghic ABD (fig. 30) i se circumscrie un cerc, al cărui centru O este situat în interiorul triunghiului. Cel de-al patrulea vîrf C al paralelogramului $ABCD$ este situat în afara cercului circumscris. De fapt, dacă punctul C' este situat în interiorul cercului de cealaltă parte a dreptei BD faţă de punctul A, atunci $\sphericalangle BC'D$ are ca măsură fie jumătate din arcul BAD (dacă punctul este situat

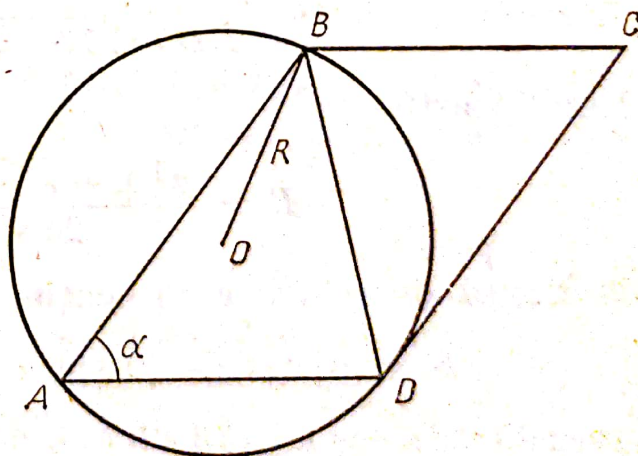


Fig. 30

pe cerc) fie poate fi mai mare. Însă arcul BAD este mai mare decît un semicerc, deoarece arcul complementar este capabil, prin definiție, de unghiul ascuțit BAD. S-a obținut o contradicție cu faptul că $\sphericalangle BAD = \sphericalangle BCD < 90°$.

Se poate afirma că dacă paralelogramul este acoperit cu cercurile K_A, K_B, K_C, K_D, raza R a cercului circumscris triunghiului ABD nu depășește unitatea. Presupunînd contrariul, adică $R = OA = OB = OD > 1$, cercurile K_A, K_B, K_D nu acoperă punctul O. Cercul K_C de asemenea nu poate acoperi punctul O, deoarece, așa cum s-a demonstrat mai înainte, $OC > R > 1$. Condiția ca $R \leqslant 1$ este deci necesară.

Această condiție este însă și suficientă. Fie $R \leqslant 1$. Din punctul O se duc perpendicularele pe laturile triunghiului ABD, care, după cum se știe, împart în părți egale laturile acestuia. Aceste perpendiculare împreună cu razele OA, OB, OC împart triunghiul ABD în șase triunghiuri dreptunghice, fiecare avînd ipotenuza egală cu raza cercului circumscris triunghiului ABD. Evident, distanța de la vîrful unui triunghi dreptunghic la orice punct al său nu depășește lungimea ipotenuzei. Pentru fiecare punct $M \in \Delta ABD$ există un vîrf al unuia din cele șase triunghiuri dreptunghice aflat față de M la o distanță care nu depășește pe R. De aceea cercul K avînd centrul în vîrful respectiv acoperă punctul M. S-a demonstrat astfel că, în cazul în care $R \leqslant 1$, triunghiul ABD este acoperit în întregime de cercurile K_B, K_A și K_D. Din considerente de simetrie rezultă că și triunghiul CDB se acoperă cu cercurile K_C, K_D și K_B.

În continuare se va folosi formula $R = \dfrac{abc}{4S}$ care exprimă raza cercului circumscris unui triunghi prin lungimile laturilor sale și aria sa. În cazul de față $AD = 1$, $AB = a$, $\sphericalangle BAD = \alpha$, iar din teorema sinusurilor se obține

$$BD = \sqrt{1 + a^2 - 2a \cos \alpha}.$$

Rezultă astfel că

$$R = \frac{a\sqrt{1 + a^2 - 2a \cos \alpha}}{2a \sin \alpha} \leqslant 1. \qquad (1)$$

Mulțimea de soluții a inecuației (1) va fi

$$S = \{a \mid \cos \alpha - \sqrt{3} \sin \alpha \leqslant a \leqslant \cos \alpha + \sqrt{3} \sin \alpha\}.$$

Inegalitatea $\cos \alpha - \sqrt{3} \sin \alpha \leqslant a$ este satisfăcută deoarece triunghiul ABD este ascuțitunghic, $AD = 1$ și deci $a = AB >$

$> AD \cos\alpha = \cos\alpha$. Din această cauză, triunghiul ABD va fi acoperit cu cercurile K_A, K_B, K_D dacă şi numai dacă

$$a \leqslant \cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha.$$

52. Fie AB muchia cea mai mare a tetraedrului. În acest caz în ΔACD şi în ΔBCD (fig. 31) nici una din laturi nu depăşeşte unitatea, iar înălţimile AF şi BK, aşa cum uşor se poate demonstra, nu depăşesc $\sqrt{1-\frac{a^2}{4}}$, unde $CD = a < 1$. Înălţimea tetraedrului $AS \leqslant AF \leqslant \sqrt{1-\frac{a^2}{4}}$, iar volumul tetraedrului este

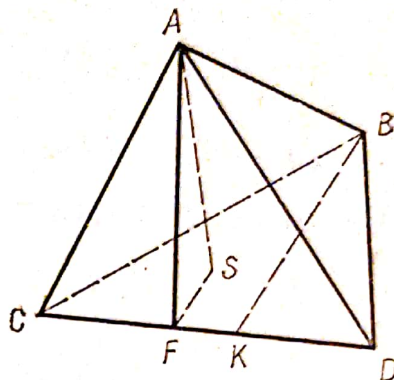


Fig. 31

$$V = \frac{1}{3} S_{\Delta ACD} \cdot AS \leqslant \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} a\left(1-\frac{a^2}{4}\right) = \frac{1}{24} a(4-a^2).$$

Se caută maximul volumului tetraedrului pentru $a \leqslant 1$, determinîndu-se maximul funcţiei $f: [0, 1] \to [0, 3]$, $f(x) = x(4-x^2)$.

$$f(x) = x(4-x^2) = 3 - (1-x) - 2(1-x^2) - x(1-x)^2 \leqslant 3,$$

ceea ce arată că valoarea maximă căutată este $f(1) = 3$, obţinîndu-se în consecinţă $V_{\max} = \max\limits_{0\leqslant a\leqslant 1} \frac{1}{24} a(4-a^2) = \frac{1}{8}$. Rămîne să se mai arate că există un tetraedru de volum $\frac{1}{8}$ şi care să satisfacă condiţiile problemei. Se ia $AC = CD = AD = BC = BD = 1$ şi planul ACD perpendicular pe planul BCD. În aceste condiţii $AB = \sqrt{\frac{3}{4}+\frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{3}{2}} > 1$.

Mulţi dintre concurenţi au căutat extremul funcţiei $f(x) = x(4-x^2)$ cu ajutorul derivatei, unii dintre ei neobservînd că punctul de extrem care se obţine astfel nu aparţine intervalului pe care funcţia este definită.

53. Se găseşte mai întîi

$$C_p - C_q = p^2 + p - (q^2 + q) = (p-q)(p+q+1).$$

Din aceasta rezultă că

$$(C_{m+1} - C_k)(C_{m+2} - C_k) \dots (C_{m+n} - C_k) =$$

$$= (m + 1 - k)(m + 1 + k + 1)(m + 2 - k)(m + 2 + k + 1) \dots$$

$$\dots (m + n - k)(m + n + k + 1) = (m - k + 1)(m - k + 2) \dots$$

$$\dots (m - k + n)(m + k + 2)(m + k + 3) \dots (m + k + n + 1).$$

Pe de altă parte

$$C_1 \cdot C_2 \dots C_n = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n \cdot n \cdot (n + 1) =$$

$$= n!(n + 1)!.$$

Astfel, trebuie să se demonstreze că

$$\frac{(m - k + 1) \dots (m - k + n)}{n!} \cdot \frac{(m + k + 2) \dots (m + k + n + 1)}{(n + 1)!}$$

este un număr întreg. Produsul a n numere întregi consecutive $(m - k + 1) \dots (m - k + n)$ este divizibil cu $n!$. Acest fapt este evident pentru cazul cînd unul dintre factori este nul, binecunoscut pentru cazul cînd factorii sînt numere pozitive și reductibil la acest din urmă caz, dacă factorii sînt numere negative. A rămas astfel să se demonstreze că $(m + k + 2)(m + k + 3) \dots (m + k + n + 1)$ este divizibil cu $(n + 1)!$. Se consideră egalitatea

$$C_{m+k+n+1}^{n+1} = \frac{(m + k + 1)(m + k + 2) \dots (m + k + n + 1)}{(n + 1)!}.$$

Se știe că acest număr este întreg. Prin ipoteză $m + k + 1$ este un număr prim mai mare ca $n + 1$, de aceea $m + k + 1$ nu se divide cu nici un factor prim al numărului $(n + 1)!$. Aceasta înseamnă că numărul $(m + k + 2) \dots (m + k + n + 1)$ este divizibil cu $(n + 1)!$. Astfel, produsul celor n numere întregi consecutive $(m + k + 2) \dots$ $\dots (m + k + n + 1)$ este divizibil prin $(n + 1)!$.

54. Fie triunghiul ABC care satisface condițiile problemei. Vîrful său B este situat pe arcul segmentului de cerc capabil de $\hat{B}_1$

(fig. 32) și sprijinindu-se pe segmentul A_0C_0. Triunghiul $A_0B_0C_0$ și acest segment de cerc sînt situate de părți diferite ale dreptei A_0C_0. Triunghiul $A_0B_0C_0$ este de fapt înscris în triunghiul ABC, din care

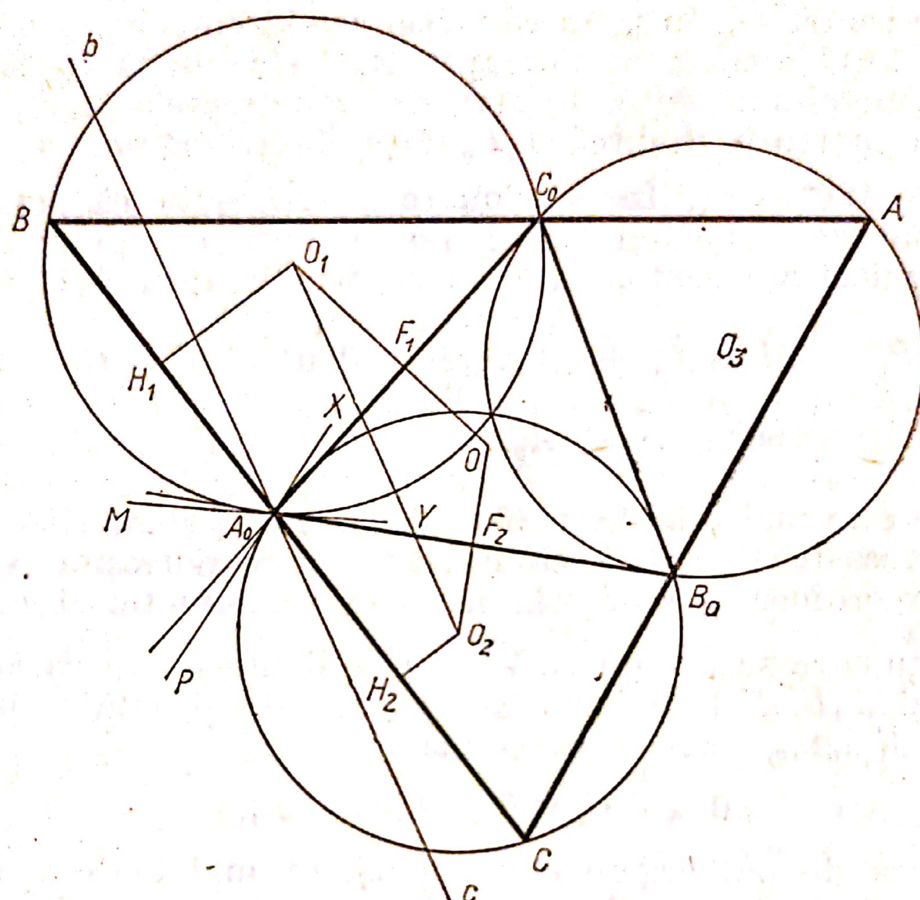


Fig. 32

cauză dreapta A_0C_0, intersectînd segmentul AB în punctul C_0, separă punctele B și A. Din aceleași motive ea separă punctele B și C. Rezultă că punctul B_0, ca punct al segmentului AC, este situat față de punctul B de cealaltă parte a dreptei A_0C_0. Întru totul analog, vîrfurile C și A sînt situate pe arcele segmentelor de cerc capabile de $\hat{C}_1$, respectiv $\hat{A}_1$, aflate în exteriorul triunghiului $A_0B_0C_0$ și sprijinindu-se pe segmentele A_0B_0 și B_0C_0. Centrele acestor segmente de cerc se vor nota cu O_1, O_2, O_3. Din cauză că unghiurile A_1, B_1, C_1 sînt toate trei ascuțite, aceste centre vor fi situate în interiorul segmentelor de cerc, adică în afara triunghiului $A_0B_0C_0$.

Poziția dreptei BC se studiază mai îndeaproape. Se duce tangenta A_0M în punctul A_0 la cercul de centru O_1, semidreapta A_0M fiind situată de aceeași parte a dreptei A_0C_0 ca și segmentul de cerc de centru O_1. În acest caz segmentul de cerc de centru O_1 este situat în

întregime în unghiul semidreptelor A_0M şi A_0C_0, iar $\sphericalangle MA_0C_0 = 180° - \hat{B}_1$.

Se vede uşor că orice semidreaptă cu originea în A_0, care este situată în interiorul unghiului obtuz MA_0C_0, intersectează segmentul de cerc de centru O_1, în timp ce restul semidreptelor nu îl intersectează. Cu totul analog, semidreapta A_0C trebuie să fie situată în interiorul unghiului obtuz format de semidreptele A_0B_0 şi A_0P, de cealaltă parte a dreptei A_0B_0 faţă de triunghiul $A_0B_0C_0$, iar $\sphericalangle B_0A_0P = 180° - \hat{C}_1$. În continuare se va arăta că aceste două unghiuri obtuze MA_0C_0 şi B_0A_0P nu se suprapun. Luînd în considerare unghiuri adiacente, începînd cu semidreapta A_0P, se obţine

$$\sphericalangle PA_0B_0 + \sphericalangle B_0A_0C_0 + \sphericalangle C_0A_0M = 360° - \hat{B}_1 - \hat{C}_1 + \hat{A}_0 = 180° + \hat{A}_1 + \hat{A}_0,$$

unghi care este mai mic decît 360°, deoarece $\hat{A}_1$ şi $\hat{A}_0$ sînt unghiuri ascuţite. Aceasta înseamnă că într-adevăr semidreapta A_0M este situată, în ordinea parcurgerii, înaintea semidreptei A_0P.

În continuare se examinează între ce limite poate varia poziţia semidreptei A_0B. Este evident că aceasta este situată în interiorul unghiului MA_0C_0, ceea ce înseamnă că

$$0 \leqslant \sphericalangle C_0A_0B \leqslant 180° - \hat{B}_1, \tag{1}$$

dacă ordinea de parcurgere este aceeaşi ca mai înainte. Condiţia ca semidreapta A_0C (aflată în prelungirea semidreptei A_0B) să fie situată în interiorul unghiului PA_0B_0 se scrie sub forma $0 \leqslant \sphericalangle CA_0B_0 \leqslant \sphericalangle PA_0B_0$ sau

$$180° \geqslant 180° - \sphericalangle CA_0B_0 \geqslant 180° - \sphericalangle PA_0B_0,$$

ceea ce dă

$$\hat{C}_1 \leqslant \sphericalangle C_0A_0B + \hat{A}_0 \leqslant 180°,$$

întrucît

$$\sphericalangle CA_0B_0 + \sphericalangle B_0A_0C_0 + \sphericalangle C_0A_0B = 180°,$$

sau, în cele din urmă

$$\hat{C}_1 - \hat{A}_0 \leqslant \sphericalangle C_0A_0B_0 \leqslant 180° - \hat{A}_0, \tag{2}$$

diferenţa $\hat{C}_1 - \hat{A}_0$ putînd fi atît pozitivă, cît şi negativă. Un calcul analog relativ la punctul C_0 va arăta că (ţinînd seama de schim-

barea ordinii de parcurgere cînd punctele A_0 și C_0 își schimbă locurile între ele):

$$0 \leqslant \sphericalangle BC_0A_0 \leqslant 180° - \hat{B}_1,$$

$$\hat{A}_1 - \hat{C}_0 \leqslant \sphericalangle BC_0A_0 \leqslant 180° - \hat{C}_0,$$

$$\sphericalangle C_0A_0B + \sphericalangle BC_0A_0 = 180° - \hat{B}_1.$$

Prima condiție pentru punctul C_0 este echivalentă cu aceeași primă condiție în punctul A_0, iar cea de-a doua arată că

$$\hat{C}_0 - \hat{B}_1 \leqslant \sphericalangle C_0A_0B \leqslant \hat{C}_0 + \hat{C}_1. \tag{3}$$

Au fost deduse trei condiții necesare pentru posibilitatea construcției triunghiului cerut de problemă, avînd vîrful în punctul B al segmentului de cerc de centru O_1. Se va arăta în continuare că aceste trei condiții sînt și suficiente. Desfășurînd, de fapt, raționamentele în sens invers, se poate vedea că prelungirea A_0C a semidreptei A_0B dincolo de punctul A_0 este situată în interiorul unghiului MA_0C și, prin urmare, intersectează segmentul de cerc de centru O_2 într-un punct C. Din condițiile (3) se deduce, din aceeași cauză, că dreapta BC_0 intersectează segmentul de cerc de centru O_3 într-un punct A situat de cealaltă parte a lui C_0 față de punctul B. Prin construcție $\sphericalangle A_0BC_0 = \hat{B}_1$, $\sphericalangle B_0AC_0 = \hat{A}_1$, $\sphericalangle A_0CB_0 = \hat{C}_1$, fiind unghiuri înscrise în segmentele de cerc de centre O_1, O_3, respectiv O_2. Punctul B_0 se află în interiorul unghiului B, format de semidreptele BA_0 și BC_0, fiindcă dreptele BA_0 și BC_0 nu intersectează $\Delta A_0B_0C_0$, acestea trecînd prin vîrfurile A_0, B_0, respectiv C_0 pe baza condițiilor (1), (2) și (3). Aceasta înseamnă că în patrulaterul $ABCB_0$ unghiurile $\sphericalangle B_0AB$, $\sphericalangle ABC$ și $\sphericalangle BCB_0$ sînt interioare și suma lor este de 180°. Rezultă astfel că $\sphericalangle AB_0C = 180°$ iar cele trei puncte A_0, B_0 și C sînt coliniare.

Întrucît în cursul deducerii condițiilor (1) — (3) nu au fost impuse nici un fel de restricții privind compararea mărimilor unghiurilor triunghiurilor $A_0B_0C_0$ și ABC, se poate considera, fără a restrînge generalitatea, că

$$\hat{C}_0 + \hat{C}_1 \geqslant \hat{B}_0 + \hat{B}_1 \text{ și } \hat{C}_0 + \hat{C}_1 \geqslant \hat{A}_0 + \hat{A}_1,$$

adică

$$\hat{C}_0 + \hat{C}_1 \geqslant \frac{1}{3} 360° > 90°. \tag{4}$$

Se vede astfel că aceste condiții (1) — (4) sînt îndeplinite, de exemplu, pentru cazul cînd $\sphericalangle C_0A_0B = 90°$, deci într-adevăr există triunghiuri circumscrise. Din acestea trebuie găsit triunghiul care are arie maximă. Este evident că acesta va fi triunghiul care va avea cele mai lungi laturi, deoarece toate triunghiurile circumscrise sînt asemenea între ele, fiindcă au unghiuri egale cu unghiurile triunghiului $A_1B_1C_1$.

Se consideră un triunghi circumscris oarecare. Centrele O_1 și O_2 ale segmentelor de cerc se proiectează pe coarde A_0B, respectiv A_0C. Segmentul H_1H_2 este proiecția segmentului O_1O_2. Lungimea acestuia nu depășește lungimea lui O_1O_2 și poate coincide numai dacă $BC \parallel O_1O_2$. Se găsește ușor că

$$\sphericalangle O_2A_0O_1 = \sphericalangle O_2A_0B_0 + \sphericalangle B_0A_0C_0 + \sphericalangle C_0A_0O_1 =$$

$$= 180° - \hat{C}_1 - \hat{B}_1 + \hat{A}_0 = \hat{A}_1 + \hat{A}_0 < 180°.$$

Din această cauză segmentul O_1O_2 intersectează semidreptele A_0C_0 și A_0B_0 formînd cu acestea un triunghi A_0XY. Prin punctul A_0 se duce paralela bc la O_1O_2. Aceasta va fi situată în afara triunghiului $A_0B_0C_0$ (în caz contrar ar intersecta segmentul XY), iar punctele O_1 și O_2 se vor afla de aceeași parte a sa ca și triunghiul $A_0B_0C_0$. Se presupune, fără a restrînge generalitatea, că semidreapta A_0b este situată de aceeași parte a dreptei A_0C_0 ca și punctul O_1.

Perpendicularele duse din punctele O_1 și O_2 respectiv pe coardele A_0C_0 și A_0B_0 trec prin mijloacele acestora F_1 și F_2, intersectîndu-se în punctul O care este centrul cercului circumscris triunghiului $A_0B_0C_0$. Deoarece acest triunghi este ascuțitunghic, punctul O se află în interiorul triunghiului $A_0B_0C_0$.

Evident, $\sphericalangle O_2OA_0 = \sphericalangle O_2OB_0 = \hat{C}_0$ deoarece aceste unghiuri sînt capabile de arce ale cercului de centru O care au aceeași mărime. În mod analog, $\sphericalangle O_1OA = \hat{B}_0$,

$$\sphericalangle O_1OO_2 = \sphericalangle O_1OA_0 + \sphericalangle A_0OO_2 = \hat{B}_0 + \hat{C}_0 < 180°.$$

Din această cauză dreaptă O_1O_2 separă punctul O de punctul A_0. Rezultă astfel că

$$90° - \hat{B}_1 = \sphericalangle C_0A_0O_1 < \sphericalangle C_0XO_1 < 90°$$

și, analog,

$$90° - \hat{C}_1 = \sphericalangle B_0A_0O_3 < \sphericalangle B_0YO_2 < 90°.$$

Ducînd prin punctul A_0 o dreaptă care face cu A_0C_0 un unghi egal cu $\sphericalangle C_0XO_1$, sînt verificate toate restricțiile de mai sus. Restricția (3) este de asemenea îndeplinită, deoarece $\hat{C}_0 - \hat{B}_1 < 90° - \hat{B}_1$. În sfîrșit, găsindu-se legătura dintre $\sphericalangle B_0YO_2$ și $\sphericalangle C_0XO_1$, se constată că se îndeplinește și condiția (2). Aceasta înseamnă că se poate

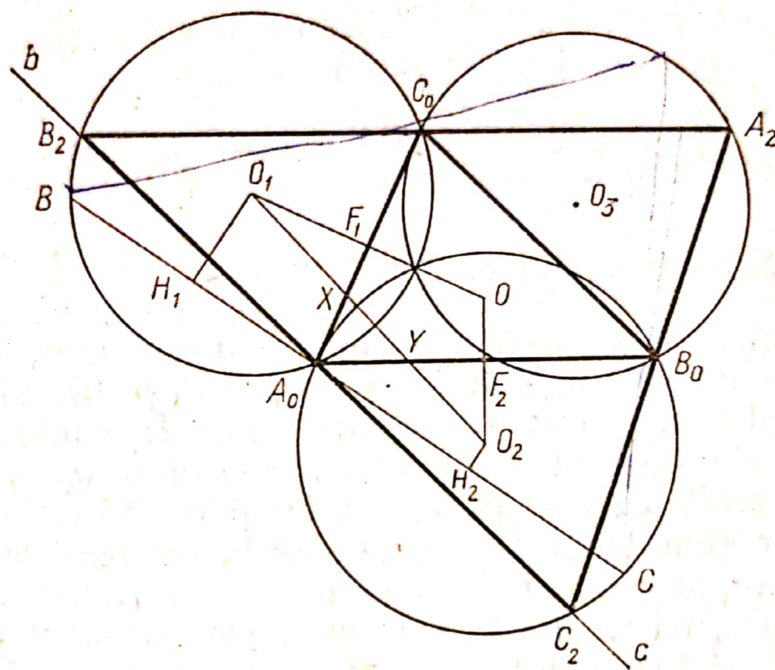


Fig. 33

circumscrie triunghiului $A_0B_0C_0$ un triunghi astfel ca latura B_2C_2 a acestuia (fig. 33) să fie paralelă cu O_1O_2. În acest caz triunghiul obținut este cel căutat.

55. Este evident că sumele de puteri care au exponentul par sînt pozitive dacă numerele $a_1, a_2, \ldots, a_8$ nu se anulează simultan. Dacă toate numerele $a_1, a_2, \ldots, a_8$ sînt nule, atunci toți termenii c_n sînt nuli. Astfel, în cazul nebanal se pot anula numai sume de puteri care au exponenții impari. Se va demonstra că dacă printre sumele de acest tip există o infinitate de sume nule, atunci toate aceste sume trebuie să fie nule. În acest scop se va arăta din aproape în aproape, că dacă printre sumele de acest tip în care intră ca baze $2m$ numere reale există o infinitate care sînt nule, atunci aceste $2m$ numere se împart în m perechi astfel ca fiecare pereche să fie formată dintr-un număr pozitiv și din opusul său. Într-adevăr, fie b maximul modulelor numerelor a_k, printre aceste numere care au modulul b aflîndu-se p numere pozitive și q numere negative. Fără a restrînge generalitatea, se poate considera că aceste numere sînt

$a_1 = a_2 = \ldots = a_p = b$, $a_{p+1} = a_{p+2} = \ldots = a_{p+q} = -b$, iar ultimele numere (în caz că există) au maximul modulului egal cu d, $0 \leqslant d < b$. Atunci

$$c_{2k+1} = (p - q)\, b^{2k+1} + a_{p+q+1}^{2k+1} + \ldots + a_{2m}^{2k+1}$$

şi dacă $p \neq q$, adică $|p - q| \geqslant 1$, pentru k suficient de mare, mai precis pentru $2k + 1 > \dfrac{\log 4m}{\log b - \log d}$ are loc inegalitatea

$$|c_{2k+1}| > |p - q|\, b^{2k+1} - 2md^{2k+1} > \frac{1}{2} b^{2k+1},$$

ceea ce arată că începînd cu $2k + 1 = \left[\dfrac{\log 4m}{\log b - \log d}\right] + 1$, toţi termenii şirului care au exponent impar sînt nenuli, ceea ce contrazice condiţiile problemei. Rezultă că $p = q$ şi deci suma primelor $p + q$ puteri din c_{2k+1} este totdeauna nulă. În consecinţă, printre sumele de puteri impare ale numerelor care rămîn, $a_{p+q+1}, a_{p+q+2}, \ldots$ $\ldots, a_{2m}$ (în caz că au mai rămas numere) o infinitate vor fi nule. Repetîndu-se raţionamentul se obţine că în termenii impari ai şirului $\{c_n\}$ puterile se reduc două cîte două. S-a demonstrat deci că toţi termenii impari ai şirului sînt nuli, pentru cazul general, cînd fiecare termen al şirului este o sumă de $2m$ puteri. Dacă $n = 4$, se regăseşte cazul din enunţul problemei.

56. Problema are sens dacă $n > 1$. În ziua a $(n - k)$-a au mai rămas de atribuit x_{n-k} medalii. În următoarea zi, cea de-a $(n - k + 1)$-a au mai rămas un număr de $x_{n-k+1} = x_{n-k} - n + k - \frac{1}{7}(x_{n-k} - n + k)$ medalii, adică $x_{n-k+1} = \frac{6}{7}(x_{n-k} - n + k)$. Rezultă astfel

$$x_{n-k} = \frac{7}{6} x_{n-k+1} - k + n. \qquad (1)$$

Folosind formula (1), se găseşte $x_n = n$, fiindcă $x_{n+1} = 0$,

$$x_{n-1} = \frac{7}{6} n - 1 + n = \frac{7}{6} n + (n - 1),$$

$$x_{n-2} = \left(\frac{7}{6}\right)^2 n + \frac{7}{6}(n - 1) + (n - 2),$$

. . . .

Se presupune că

$$x_{n-l} = \left(\frac{7}{6}\right)^{l} n + \left(\frac{7}{6}\right)^{l-1}(n-1) + \ldots + \frac{7}{6}(n-l+1) + (n-l). \quad (2)$$

Formula (2) se va demonstra prin inducție matematică. Înmulțind ambii membri ai inegalității

$$x_{n-l+1} = \left(\frac{7}{6}\right)^{l-1} n + \ldots + \frac{7}{6}(n-l+2) + (n-l+1) \quad (3)$$

cu $\frac{7}{6}$, adăugînd la fiecare dintre aceștia pe $n-l$ și înlocuind în (1), se găsește (2).

Deoarece în enunț este impusă condiția $x_1 = m$,

$$m = \left(\frac{7}{6}\right)^{n-1} n + \left(\frac{7}{6}\right)^{n-2}(n-1) + \ldots + 2\cdot\frac{7}{6} + 1 =$$

$$= n\left[\left(\frac{7}{6}\right)^{n-1} + \left(\frac{7}{6}\right)^{n-2} + \ldots + 1\right] - \left[\left(\frac{7}{6}\right)^{n-2} + \right.$$

$$\left. + 2\left(\frac{7}{6}\right)^{n-3} + \ldots + (n-1)\right] = 6n\left[\left(\frac{7}{6}\right)^{n} - 1\right] -$$

$$- 42\left(\frac{7}{6}\right)^{n-1} + 42 + 6(n-1) = 6(n-6)\left(\frac{7}{6}\right)^{n} + 36.$$

Fiindcă numerele 7 și 6 sînt prime între ele, numărul $\frac{n-6}{6^{n-1}}$ este întreg. Rezultă astfel că numărul n este divizibil cu 6. Oricare ar fi $n > 6$,

$$|n-6| < n = \frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{n}{n-1} < 2^{n-1} < 6^{n-1}.$$

Astfel $|n-6| < 6^{n-1}$, însă, deoarece $\frac{n-6}{6^{n-1}} < 1$ este un număr întreg, rezultă că $n-6=0$, adică $n=6$, fiindcă singurul număr întreg nenegativ mai mic decît 1 este zero. În acest caz rezultă că $m=36$.

Se verifică ușor că $n=6$ și $m=36$ satisfac condițiile problemei.

57. Rezolvarea I. Din teorema sinusurilor (fig. 34) se găsește

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \quad \text{sau} \quad \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin 2A} = \frac{c}{\sin 3A},$$

deoarece $B = 2A$ și, în consecință, $b > a$. Se notează $\frac{a}{\sin A} = \lambda$. Din relațiile

$$a^2 = \lambda^2 \sin^2 A, \ b^2 = \lambda^2 \sin^2 2A, \ c^2 = \lambda^2 \sin^2 3A,$$

rezultă

$$b^2 - a^2 = \lambda^2 (\sin^2 2A - \sin^2 A), \quad ac = \lambda^2 \sin A \cdot \sin 3A.$$

Se poate arăta, printr-un calcul simplu, că

$$\sin^2 2A - \sin^2 A = \sin A \sin 3A,$$

și deci, în triunghiul considerat, $b^2 - a^2 = ac$ sau $b^2 = a(a + c)$. Se consideră această relație sub forma $b^2 = a(a + c)$. Sînt posibile următoarele cazuri:

1) $a = n$, $b = n + 1$, $c = n + 2$. În aceste condiții $(n + 1)^2 = n(2n + 2)$, adică $n^2 - 1 = 0$, ceea ce înseamnă că $n = 1$, iar $a = 1$, $b = 2$ și $c = 3$, deci triunghiul va degenera într-un segment.

2) $a = n$, $b = n + 2$, $c = n + 1$. Se obține $(n + 2)^2 = n(2n+1)$, adică $n = 4$, iar $a = 4$, $b = 6$ și $c = 5$. Triunghiul ale cărei laturi au lungimile $a = 4$, $b = 6$ și $c = 5$ constituie rezolvare a problemei.

3) $c = n$, $a = n + 1$, $b = n + 2$. În consecință $n^2 - n - 3 = 0$, obținîndu-se o ecuație în necunoscuta n care nu are rădăcini întregi.

Se va demonstra în continuare că triunghiul găsit în cazul al doilea este, într-adevăr, rezolvare a problemei, adică unghiurile sale satisfac condiția cerută în enunț.

Calculîndu-se $\cos A$ și $\cos B$, se obține, cu ajutorul teoremei cosinusului, $\cos A = \frac{3}{4}$ și $\cos B = \frac{1}{8}$, adică $\cos 2A = \cos B$ și deci $B = 2A$.

Rezolvarea II. Se duce bisectoarea BD a unghiului B (fig. 35) și se notează $CD = b_1$, $DA = b_2$. Triunghiul BCD este

astfel asemenea cu triunghiul ABC și, prin urmare, $\frac{c}{b_2} = \frac{a}{b_1} = \frac{b}{a}$, ceea ce arată că $a = b_1 \cdot \frac{b}{a}$ și $c = b_2 \cdot \frac{b}{a}$. Prin adunarea acestor două relații se obține

$$(b_1 + b_2)\frac{b}{a} = \frac{b^2}{a} = c + a,$$

care este număr întreg. Deoarece în enunțul problemei se dă că

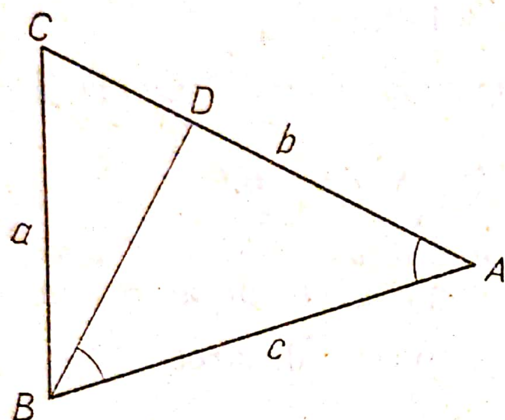


Fig. 34

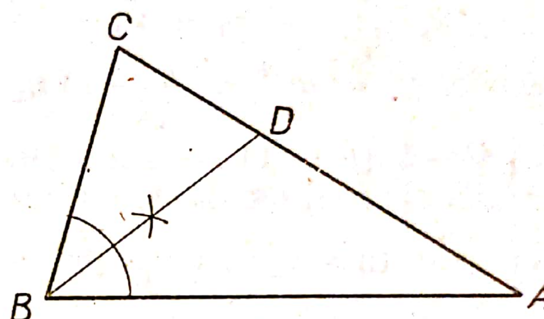


Fig. 35

lungimile laturilor sînt numere întregi consecutive și $b > a$, înseamnă că sau 1) $b = a + 1$ sau 2) $b = a + 2$.

1) $b = a + 1$, $\frac{b^2}{a} = \frac{a^2 + 2a + 1}{a} = a + 2 + \frac{1}{a}$ și deci $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$ iar triunghiul este degenerat.

2) $b = a + 2$, $\frac{b^2}{a} = \frac{a^2 + 4a + 4}{a} = a + 4 + \frac{4}{a}$, ceea ce arată că a este divizor al lui 4. Din această cauză, sau $a = 1$ sau $a = 2$ sau $a = 4$.

Dacă $a = 1$, atunci $b = 3$ și $c = \frac{b^2}{a} - a = 8$, ceea ce nu satisface condiția.

Dacă $a = 2$, atunci $b = 4$ și $c = 6$, ceea ce, din nou, nu satisface condiția din enunț.

Dacă $a = 4$, atunci $b = 6$ și $c = 5$, obținîndu-se rezolvarea problemei.

58. Deoarece produsul cifrelor unui număr este nenegativ, atunci $x^2 - 10x - 22 \geqslant 0$ și, prin urmare, $x \geqslant 5 + \sqrt{47} > 11$.

Se va demonstra mai întîi că produsul cifrelor oricărui număr nu este mai mare decît însuşi numărul. Fie $x = \overline{a_1 a_2 a_3 \ldots a_n}$. În acest caz

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n \leqslant a_1 \cdot 9^{n-1} \leqslant a_1 \cdot 10^{n-1} + a_2 \cdot 10^{n-2} + \ldots + a_n = x.$$

De aici rezultă că $x^2 - 10x - 22 \leqslant x$ şi, în consecinţă, $x \leqslant \frac{11}{2} + \frac{\sqrt{209}}{2} < 13$. Numărul întreg x va satisface astfel inegalităţile $11 < x < 13$, ceea ce înseamnă că $x = 12$.

Verificare: $144 - 120 - 22 = 1 \cdot 2$.

59. Fie $y_1 = x_2 - x_1$, $y_2 = x_3 - x_2, \ldots, y_k = x_{k+1} - x_k, \ldots, y_{n-1} = x_n - x_{n-1}$, $y_n = x_1 - x_n$.

Astfel $y_k = ax_k^2 + (b-1)x_k + c$, iar $\sum_{k=1}^{n} y_k = 0$.

a) Dacă $(b-1)^2 - 4ac < 0$, polinomul $ax^2 + (b-1)x + c$ nu are rădăcini reale şi ia valori de un singur semn, de aceea sau toţi $y_k > 0$ sau toţi $y_k < 0$, ceea ce nu se poate deoarece $\sum_{k=1}^{n} y_k = 0$. Rezultă că sistemul nu are soluţii reale.

b) Dacă $(b-1)^2 - 4ac = 0$, polinomul $ax^2 + (b-1)x + c$ se anulează numai pentru o singură valoare a lui x, găsind în acest caz fie toţi $y_k \geqslant 0$, fie toţi $y_k \leqslant 0$; deoarece $\sum_{k=1}^{n} y_k = 0$, înseamnă că toţi $y_k = ax_k^2 + (b-1)x_k + c = 0$ şi în acest caz $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = x_0$, x_0 fiind rădăcina dublă a trinomului de gradul doi $ax^2 + (b-1)x + c$. Sistemul are deci o soluţie reală unică.

c) Dacă $(b-1)^2 - 4ac > 0$, sistemul are cel puţin două soluţii şi anume toţi $x_k = x_0'$ şi toţi $x_k = x_0''$, prin x_0' şi x_0'' înţelegînd rădăcinile polinomului $ax^2 + (b-1)x + c$, întrucît $x_0 = ax_0^2 + bx_0 + c$.

60. Se notează cu A_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ vîrfurile tetraedrului, iar cu $a_{ik} = a_{ki}$ lungimea muchiei $A_i A_k$. Fie a_{12} lungimea unei muchii care nu este mai scurtă decît celelalte, adică

$$a_{12} \geqslant a_{ik} \ (i, k = 1, 2, 3, 4, \ i \neq k).$$

În triunghiurile $A_1A_2A_3$ şi $A_1A_2A_4$

$$a_{12} < a_{13} + a_{23}, \qquad a_{12} < a_{14} + a_{24}.$$

Rezultă astfel că

$$2a_{12} < a_{13} + a_{23} + a_{14} + a_{24}. \qquad (1)$$

Dacă se presupune că nu se poate construi un triunghi cu segmentele de lungime a_{12}, a_{13} şi a_{14}, înseamnă că

$$a_{12} \geqslant a_{13} + a_{14}. \qquad (2)$$

Din inegalităţile (1) şi (2) rezultă că $a_{12} < a_{23} + a_{24}$, fiind posibil în acest caz să se construiască triunghiul cu segmentele de lungime a_{12}, a_{23} şi a_{24}.

61. a) Se demonstrează că funcţia are perioada $2a$. Se vede din enunţ că $f(x+a) > \frac{1}{2}$ pentru orice x. Trecînd în membrul întîi pe $\frac{1}{2}$ şi ridicînd la pătrat, se obţine

$$\left[f(x+a) - \frac{1}{2}\right]^2 = f(x) - [f(x)]^2$$

sau

$$[f(x+a)]^2 - f(x+a) = f(x) - [f(x)]^2 - \frac{1}{4}. \qquad (1)$$

Folosind proprietatea din enunţ a funcţiei, se găseşte

$$f(x+2a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x+a) - [f(x+a)]^2}$$

şi ţinînd seama de relaţia (1), rezultă

$$f(x+2a) = \frac{1}{2} + \sqrt{[f(x)]^2 - f(x) + \frac{1}{4}} = \frac{1}{2} + \left|f(x) - \frac{1}{2}\right| = f(x),$$

deoarece $f(x) > \frac{1}{2}$.

b) Dacă $a = 1$, se verifică uşor că proprietatea din enunţ este îndeplinită de funcţia (fig. 36)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & 2n \leqslant x < 2n+1, \\ 1 & 2n+1 \leqslant x < 2n+2. \end{cases} \qquad n \in Z.$$

Poate fi dat şi un exemplu mai complicat (fig. 37):

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}-n & 2n\leqslant x\leqslant 2n+1,\\ & \qquad\qquad n\in Z.\\ \frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}x-n-\left(\frac{1}{2}x-n\right)^2}, & 2n+1\leqslant x\leqslant 2n+2,\end{cases}$$

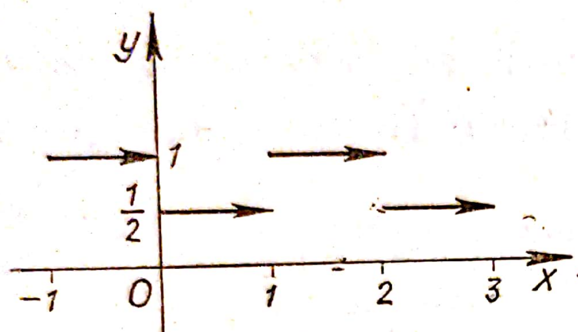


Fig. 36

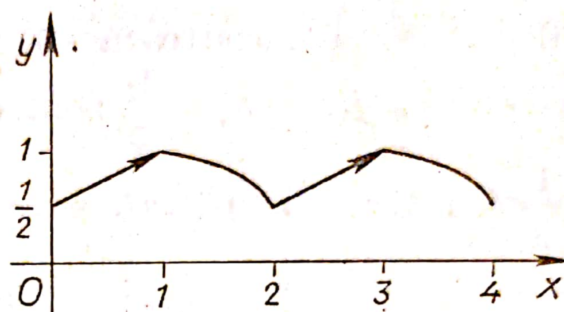


Fig. 37

62. Rezolvarea I. Se foloseşte lema

$$\left[x+\frac{1}{2}\right]=[2x]-[x].$$

Demonstraţie. Orice număr x poate fi scris sub forma $x=k+\alpha$, fie sub forma $x=k+\frac{1}{2}+\alpha$, k fiind număr întreg iar $0\leqslant\alpha<\frac{1}{2}$.

În cazul în care $x=k+\alpha$ se găseşte $\left[k+\alpha+\frac{1}{2}\right]=k$,

$[2k+2\alpha]=2k$, $[k+\alpha]=k$, adică $\left[x+\frac{1}{2}\right]=[2x]-[x]$.

În celălalt caz, cînd $x=k+\frac{1}{2}+\alpha$, se obţine $\left[k+\frac{1}{2}+\alpha+\frac{1}{2}\right]=$ $=k+1$, $[2k+2\alpha+1]=2k+1$, $\left[k+\frac{1}{2}+\alpha\right]=k$, deci şi în acest caz $\left[x+\frac{1}{2}\right]=[2x]-[x]$. Lema este astfel demonstrată.

Se va aplica lema la calculul sumei din enunț:

$$\left[\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right]+\left[\frac{n}{4}+\frac{1}{2}\right]+\ldots+\left[\frac{n}{2^{k+1}}+\frac{1}{2}\right]+\ldots=$$

$$=[n]-\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{2}\right]-\left[\frac{n}{4}\right]+\ldots+\left[\frac{n}{2^k}\right]-\left[\frac{n}{2^{k+1}}\right]+\ldots=n,$$

deoarece pentru $k>\log_2 n$ termenul $\left[\frac{n}{2^k}\right]$ și toți cei care urmează sînt nuli.

R e z o l v a r e a II. Se observă că din moment ce $2^i>n$, termenul de rang i și cei care îi urmează sînt nuli, deci suma considerată este finită. Dacă se trece de la $n=k-1$ la $n=k$, fiecare termen al sumei sau rămîne neschimbat sau se mărește cu o unitate. Dacă termenul se mărește cu o unitate, atunci există numărul m întreg astfel încît

$$\frac{k-1+2^i}{2^{i+1}}<m\leqslant\frac{k+2^i}{2^{i+1}}.$$

În consecință, $k-1<m\cdot 2^{i+1}-2^i=2^i(2m-1)\leqslant k$. Rezultă astfel că numărul întreg $k=2^i(2m-1)$. Pentru fiecare k există însă numai o singură valoare a lui i $(i\geqslant 0)$ pentru care aceasta are loc. Reciproc, pentru $k=2^i(2m-1)$ termenul corespunzător se mărește cu o unitate. De aceea, fiindcă pentru $n=1$ suma are valoarea 1 și se mărește cu cîte o unitate cînd n se mărește cu o unitate, înseamnă că suma cerută are valoarea n.

63. Fie $a=4k^4$ $(k\in N,\ k>1)$. În acest caz

$$z=n^4+a=n^4+4k^4=n^4+4n^2k^2+4k^4-4n^2k^2=$$

$$=(n^2+2k^2)^2-4n^2k^2=(n^2+2k^2-2nk)(n^2+2k^2+2nk),$$

$$n^2+2k^2-2nk=(n-k)^2+k^2\geqslant k^2>1,$$

$$n^2+2k^2+2nk=(n+k)^2+k^2>k^2>1,$$

ceea ce înseamnă că z este produs a doi factori, fiecare fiind mai mare decît 1. Numărul z este deci număr compus pentru mulțimea de valori ale lui a de forma $a=4k^4$, $k=2, 3, \ldots$

64. $$f(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\cos(a_i+x)}{2^{i-1}}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\cos[(a_i+x_1)+(x-x_1)]}{2^{i-1}}=$$

$$=\cos(x-x_1)\sum_{i=1}^{n}\frac{\cos(a_i+x_1)}{2^{i-1}}-\sin(x-x_1)\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin(a_i+x_1)}{2^{i-1}}=$$

$$=\cos(x-x_1)f(x_1)+\sin(x-x_1)f\left(\frac{\pi}{2}+x_1\right).$$

În enunţ se dă $f(x_1)=0$. Dacă $f\left(\frac{\pi}{2}+x_1\right)=0$, atunci $f(x)\equiv 0$, însă

$$f(-a_1)=\cos 0+\sum_{i=2}^{n}\frac{\cos(a_i-a_1)}{2^{i-1}}\geqslant 1-\sum_{i=2}^{n}\left|\frac{\cos(a_i-a_1)}{2^{i-1}}\right|\geqslant 1-\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{2^{i-1}}>0.$$

Rezultă că $f(x)\not\equiv 0$ şi $f\left(\frac{\pi}{2}+x_1\right)\neq 0$. Din enunţul problemei rezultă că $f(x_2)=0$, deci $\sin(x_2-x_1)=0$, adică $x_2-x_1=m\pi$.

65. Se consideră, succesiv, toate cazurile posibile.

a) $k=1$. Fie $AB=a$, $AD=AC=CB=BD=CD=1$, iar M mijlocul muchiei CD (fig. 38). Atunci din ΔBCD se obţine $BM=\frac{\sqrt{3}}{2}$, iar din ΔACD, analog, $AM=\frac{\sqrt{3}}{2}$. În ΔABM avem $AB<AM+BM$, adică $AB<\sqrt{3}$ sau $a<\sqrt{3}$. Această condiţie este şi suficientă. Într-adevăr, se poate construi totdeauna un tetraedru care să aibă feţele ACD şi CBD triunghiuri echilaterale de latură 1, iar muchia AB să aibă lungimea $a<\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=AM+BM$.

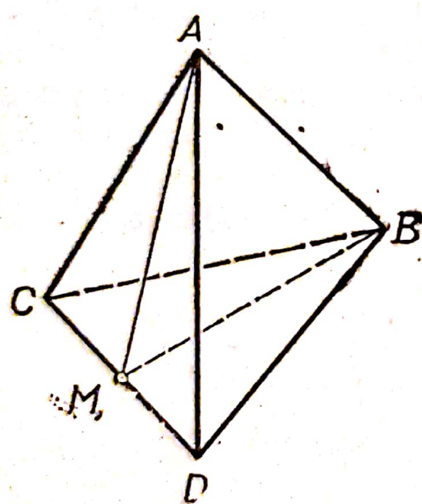


Fig. 38

b) $k=2$. În acest caz există două posibilităţi:

1) Muchiile de lungime a pleacă din acelaşi vîrf. Atunci

$$AC=AD=a,\ AB=BC=BD=CD=1.$$

În acest caz din ΔBCD (fig. 38) se găsește că $BM = \frac{\sqrt{3}}{2}$, iar din ΔAMC se găsește că $AM = \sqrt{a^2 - \frac{1}{4}}$. În ΔABM avem $AB - BM < AM < AM + BM$ și se obține

$$1 - \frac{\sqrt{3}}{2} < \sqrt{a^2 - \frac{1}{4}} < 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Toți membrii acestor inegalități sînt pozitivi. Ridicînd pe toți aceștia la pătrat, se obțin inegalitățile echivalente

$$1 - \sqrt{3} + \frac{3}{4} < a^2 - \frac{1}{4} < 1 + \sqrt{3} + \frac{3}{4}.$$

În consecință

$$2 - \sqrt{3} < a^2 < 2 + \sqrt{3} \text{ și deci } \sqrt{2 - \sqrt{3}} < a < \sqrt{2 + \sqrt{3}}.$$

Această condiție este și suficientă , ceea ce se poate stabili prin construcția unui tetraedru care o verifică. Se construiește, de exemplu, triunghiul echilateral BCD, iar prin mijlocul M al muchiei CD se construiește planul perpendicular pe CD. În acest plan se descrie un cerc de rază egală cu 1 avînd pe B ca centru, și se găsește punctul A, cel de-al patrulea vîrf al tetraedrului, situat pe acest cerc, aflat față de M la distanța AM astfel ca

$$1 - \frac{\sqrt{3}}{2} < AM < 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

2) Muchiile de lungime a sînt opuse. Atunci $AB = CD = a$, $AC = AD = BC = BD = 1$. Din ΔMBD, și analog din triunghiurile MAD și ABM (fig. 38) se găsește că $MB = \sqrt{1 - \frac{a^2}{4}}$, $AM = \sqrt{1 - \frac{a^2}{4}}$ și $AM + MB > AB$, deci $2\sqrt{1 - \frac{a^2}{4}} > a$, sau $4\left(1 - \frac{a^2}{4}\right) > a^2$, $4 - a^2 > a^2$, $2a^2 < 4$, $a < \sqrt{2}$.

Această condiție este și suficientă, ceea ce se poate arăta construind tetraedrul care verifică condițiile arătate. Se pot construi, de exemplu, patru triunghiuri cu laturile de lungimi 1, 1 și $a < \sqrt{2}$.

Acestea se unesc, aşa cum se arată în fig. 38. Se obţine tetraedrul cu muchiile $CD = AB = a$, $AC = AD = CB = BD = 1$.

Astfel, pentru $k = 2$ condiţia necesară şi suficientă va fi $0 < a < \sqrt{2+\sqrt{3}}$.

c) $k = 3$. În acest caz există trei moduri de distribuire a muchiilor în tetraedru.

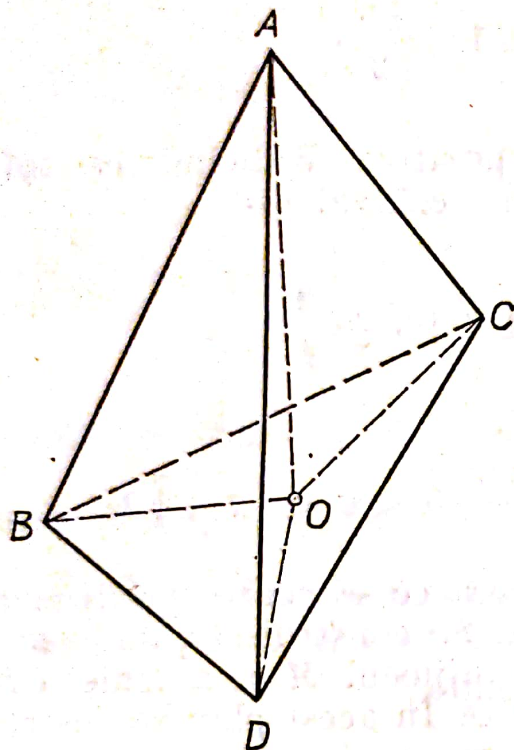


Fig. 39

1) Muchiile de lungime a au un vîrf comun, deci $AC = AB = AD = a$, iar $BC = BD = CD = 1$. Este necesar deci ca $AC > CO$, unde O este centrul triunghiului BCD (fig. 39). Condiţia necesară şi suficientă este, evident,

$$CO = R = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ şi } a > R,\ a > \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

2) Muchiile de lungime a formează un triunghi. Fie $BC = CD = BD = a$, iar $AC = AB = AD = 1$ (fig. 39).

Analog cu cazul precedent se va obţine

$$CO < AC,\ CO = R,\ a = R\sqrt{3},$$

$$R = \frac{a}{\sqrt{3}},\ R < 1,\ \frac{a}{\sqrt{3}} < 1,\ a < \sqrt{3}.$$

Nu este necesar să se studieze cazul 3): $AB = CD = BC = a$, $AC = AD = DB = 1$, deoarece condiţiile necesare şi suficiente pe care trebuie să le îndeplinească a în cazurile 1) şi 2) acopăr deja toată semiaxa pozitivă $\left(a > \frac{1}{\sqrt{3}},\ a < \sqrt{3}\right)$, astfel încît în cazul $k=3$ tetraedrul există oricare ar fi $a > 0$.

d) Cazurile $k = 4$ şi $k = 5$ se reduc uşor la cazul $k = 2$, respectiv la cazul $k = 1$. Într-adevăr, dacă se dă $k = 4$, micşorînd toate muchiile tetraedrului de a ori, se obţin patru muchii de lungime 1 şi două muchii de lungime $\frac{1}{a}$. Se notează $\frac{1}{a} = b$ şi ţinînd seama de cazul b), condiţiile necesare şi suficiente se scriu astfel:

$$0 < b < \sqrt{2+\sqrt{3}},\ \text{adică } 0 < \frac{1}{a} < \sqrt{2+\sqrt{3}}.$$

Rezultă $a > \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$, ceea ce se mai scrie și $a > \sqrt{2-\sqrt{3}}$. În cazul $k = 5$, în aceleași condiții, se obțin cinci muchii de lungime 1 și o muchie de lungime $b = \frac{1}{a}$.

Plecînd de la cazul a), se găsește $b < \sqrt{3}$ și deci $\frac{1}{a} < \sqrt{3}$ sau, altfel scris, $a > \frac{1}{\sqrt{3}}$

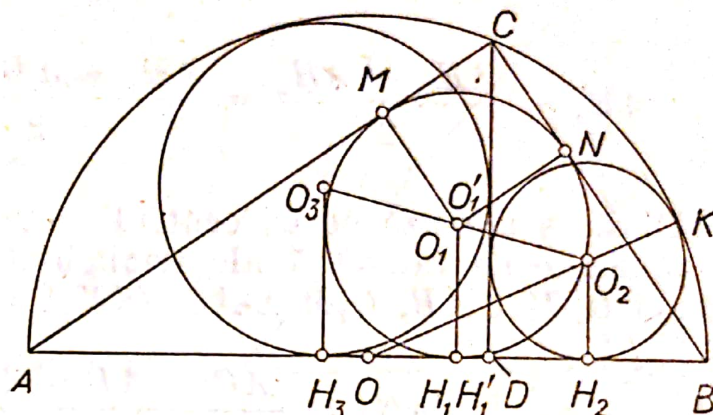


Fig. 40

66. Fie O_2 centrul semicercului γ_2 și $O_2H_2 \perp AB$ (fig. 40). Se presupune că punctul H_2 este situat între punctele B și D (celălalt caz poate fi studiat analog). Se alege raza semicercului γ drept unitate de lungime. Dacă se notează $AD = x$ și $O_2H_2 = r$, se obține $AH_2 = r + x$ iar $OO_2 = \sqrt{OH_2^2 + r^2} = \sqrt{(x+r-1)^2 + r^2}$. Deoarece semicercurile γ și γ_2 sînt tangente, $OO_2 + O_2K = 1$, adică

$$\sqrt{(x+r-1)^2 + r^2} = 1 - r, \ (x+r-1)^2 = 1 - 2r$$

și se deduce că $AH_2^2 = (x+r)^2 = [(x+r-1)+1]^2 = 2x$. Pe de altă parte $AC^2 = AD \cdot AB = 2x = AH_2^2$, adică $AC = AH_2$.

Fie O_3 centrul semicercului γ_3 și $O_3H_3 \perp AB$. Analog se demonstrează că $BC = BH_3$. Fie O_1 mijlocul segmentului O_3O_2, iar $O_1H_1 \perp AB$. Se va arăta că O_1 este centrul semicercului γ_1. Întrucît O_1H_1 este linie mijlocie în trapezul $O_2H_2H_3O_3$, atunci $O_1H_1 = \frac{O_3H_3 + O_2H_2}{2}$. Or O_3H_3 este raza semicercului γ_3, iar CD este tangentă la acest semicerc. Distanța de la punctul O_3 la CD este dată de lungimea segmentului H_3D și este egală cu raza semicercului γ_3, prin urmare, $O_3H_3 = H_3D$. Deoarece O_2H_2 este rază a semicercului γ_2, iar CD este tangentă la acest semicerc, distanța de la punctul O_2 la

CD va fi egală cu $H_2D = r$ şi deci $O_2H_2 = H_2D$. Aceasta înseamnă că

$$O_1H_1 = \frac{O_3H_3 + O_2H_2}{2} = \frac{H_3D + H_2D}{2} = \frac{H_3H_2}{2} =$$

$$= \frac{AH_2 + BH_3 - AB}{2} = \frac{AC + BC - AB}{2},$$

$$AH_1 = \frac{AH_3 + AH_2}{2} = \frac{AH_2 + AB - BH_3}{2} = \frac{AC + AB - BC}{2}.$$

Dacă se notează cu O_1' centrul semicercului γ_1, iar cu H_1', M şi N punctele de tangenţă ale triunghiului ABC cu acest semicerc, atunci $O_1'H_1' \perp AB$, $O_1'M \perp AC$, $O_1'N \perp BC$, iar

$$AH_1' = \frac{AC + AB - BC}{2} = AH_1.$$

Deoarece $MC = CN$ şi $BH_1' = BN$ ca tangente la acelaşi cerc, duse din punctele C, respectiv B, se găseşte că

$$AH_1' + AM = (AB - BH_1') + (AC - MC) = AC + AB -$$

$$- (MC + BH_1') = AC + AB - (CN + BN) =$$

$$= AC + AB - BC.$$

Deoarece $O_1'H_1' = O_1'M = CM = \dfrac{AC + BC - AB}{2} = O_1H_1$, înseamnă că punctele O_1 şi O_1' coincid. S-a demonstrat, în acest fel, că punctele O_1, O_2 şi O_3 sînt situate pe aceeaşi dreaptă. Fiindcă dreapta simetrică a unei tangente la cerc faţă de o dreaptă care trece prin centrul cercului este la rîndul său tangentă la cerc, rezultă că dreapta simetrică cu AB faţă de dreapta $O_3O_1O_2$ este tangenta comună căutată.

67. Cîţiva concurenţi au dat o evaluare mai bună pentru numărul patrulaterelor convexe decît cea care este cerută de enunţul problemei. Ei au arătat că numărul patrulaterelor convexe care au vîrfurile în cele n puncte date nu este mai mic decît $\dfrac{C_n^5}{n-4}$. În continuare este expusă una dintre rezolvările pentru care juriul a acordat premii speciale.

L e m ă. *Din cinci puncte date în plan, astfel ca oricare trei să nu fie situate pe aceeași dreaptă, se găsesc patru puncte care formează un patrulater convex.*

Demonstrația acestei leme poate fi găsită la problema 119 (fig. 41).

Se consideră toate grupele de cîte cinci puncte din cele n puncte date (grupe care există, deoarece $n > 4$). Se pot forma astfel C_n^5 grupe. În fiecare grupă există cel puțin patru puncte care sînt vîrfuri ale unui patrulater convex. Fiecare din aceste patrulatere va fi numărat însă de cîte $n - 4$ ori, deoarece dacă patru puncte sînt vîrfuri ale patrulaterului, cel de-al cincelea punct din grupă poate fi luat oricare din celelalte $n - 4$ puncte. Se găsește astfel că numărul patrulaterelor convexe nu poate fi mai mic decît $\frac{C_n^5}{n-4}$. Se va arăta în continuare că $\frac{C_n^5}{n-4} \geqslant C_{n-3}^2$. O succesiune de transformări echivalente va conduce la

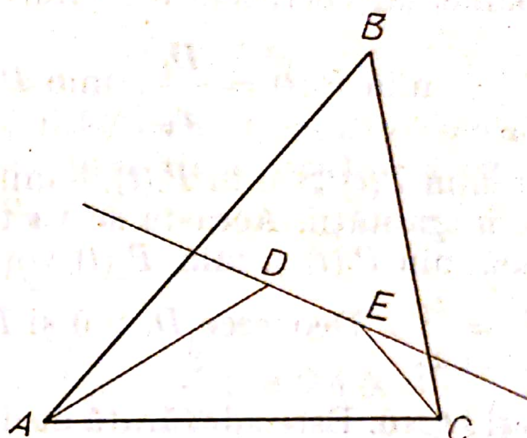


Fig. 41

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{120(n-4)} \geqslant \frac{(n-3)(n-4)}{2},$$

$$n(n-1)(n-2) - 60(n-4) \geqslant 0, \quad n^3 - 3n^2 - 58n + 240 \geqslant 0.$$

Polinomul din membrul întîi al inegalității obținute are rădăcinile $n_1 = 5$, $n_2 = 6$ și $n_3 = -8$. Dacă inegalitatea se transcrie sub forma $(n-5)(n-6)(n+8) \geqslant 0$, rezultă că pentru $n > 4$ aceasta constituie o egalitate numai dacă $n = 5$ sau dacă $n = 6$. În cazul cînd $n > 6$ este adevărată inegalitatea strictă $\frac{C_n^5}{n-4} > C_{n-3}^3$.

68. Se notează $x_1y_1 - z_1^2 = D_1$, $x_2y_2 - z_2^2 = D_2$, iar

$$(x_1 + x_2) \cdot (y_1 + y_2) - (z_1 + z_2)^2 = D.$$

Se va demonstra că

$$\frac{D}{x_1 + x_2} \geqslant \frac{D_1}{x_1} + \frac{D_2}{x_2}.$$

Dacă se consideră polinoamele

$$P_1(t) = x_1t^2 + 2z_1t + y_1, \quad P_2(t) = x_2t^2 + 2z_2t + y_2,$$
$$P(t) = P_1(t) + P_2(t),$$

se observă că $-D_1$, $-D_2$ și $-D$ sînt discriminanții acestor polinoame, iar coeficientul dominant al lui $P(t)$ este $x_1 + x_2$. Evident că

$$\min P_1(t) = \frac{D_1}{x_1}, \ \min P_2(t) = \frac{D_2}{x_2}, \ \min P(t) = \frac{D}{x_1 + x_2}$$

iar $\min P(t) \geqslant \min P_1(t) + \min P_2(t)$, ceea ce încheie demonstrația inegalității. Aceasta se va transforma în egalitate, dacă și numai dacă $\min P_1(t)$ și $\min P_2(t)$ vor fi atinse în același punct, adică dacă $\frac{z_1}{x_1} = \frac{z_2}{x_2}$. Deoarece $D_1 > 0$ și $D_2 > 0$, inegalitatea demonstrată arată că și $D > 0$. Este adevărată deci inegalitatea $\frac{8}{D} \leqslant \frac{8}{(x_1+x_2)\left(\frac{D_1}{x_1}+\frac{D_2}{x_2}\right)}$.

Mai trebuie demonstrat că $\frac{8}{(x_1 + x_2)\left(\frac{D_1}{x_1} + \frac{D_2}{x_2}\right)} \leqslant D_2^{-1} + D_1^{-1}$, inegalitate care, deoarece numitorul membrului întîi este pozitiv, se reduce la inegalitatea echivalentă

$$(D_1^{-1} + D_2^{-1})\left(\frac{x_1 + x_2}{x_1} D_1 + \frac{x_1 + x_2}{x_2} D_2\right) \geqslant 8.$$

Membrul întîi al inegalității se scrie succesiv:

$$(D_1^{-1} + D_2^{-1})\left(\frac{x_1 + x_2}{x_1} D_1 + \frac{x_1 + x_2}{x_2} D_2\right) =$$
$$= \frac{x_1 + x_2}{x_1} + \frac{x_1 + x_2}{x_2} + \frac{D_1}{D_2} + \frac{D_2}{D_1} + \frac{x_2}{x_1}\frac{D_1}{D_2} + \frac{x_1}{x_2}\frac{D_2}{D_1} =$$
$$= 2 + \left(\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}\right) + \left(\frac{D_1}{D_2} + \frac{D_2}{D_1}\right) + \left(\frac{x_2}{x_1}\frac{D_1}{D_2} + \frac{x_1}{x_2}\frac{D_2}{D_1}\right) \geqslant 8,$$

deoarece fiecare cantitate din paranteze nu este mai mică decît doi pe baza inegalității lui Cauchy.

Enunțul a fost astfel complet demonstrat. Egalitatea este adevărată dacă și numai dacă $x_1 = x_2$ și $D_1 = D_2$. Inegalitatea inițială

devine egalitate atunci şi numai atunci cînd sînt îndeplinite simultan condiţiile

$$\begin{cases} x_1 = x_2, \\ D_1 = D_2, \\ \dfrac{z_1}{x_1} = \dfrac{z_2}{x_2}, \end{cases} \quad \text{ceea ce implică} \quad \begin{cases} x_1 = x_2, \\ y_1 = y_2, \\ z_1 = z_2. \end{cases}$$

69. Lemă. *Fie* $\sphericalangle ABC = \beta$, $\sphericalangle BAC = \alpha$, *O centrul cercului înscris de rază r, iar* O_1 *centrul cercului exînscris a cărui rază este* ρ. *În acest caz este îndeplinită relaţia* (fig. 42)

$$\frac{r}{\rho} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}.$$

Demonstraţie. Deoarece $\sphericalangle OBA = \frac{\beta}{2}$, $\sphericalangle OAB = \frac{\alpha}{2}$, iar $OA \perp O_1A$ şi $OB \perp O_1B$, rezultă

$$AB = AN + NB = \frac{r}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} + \frac{r}{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}} = \frac{r}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}\left(\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right).$$

Pe de altă parte,

$$AB = AK + KB = \rho \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \rho \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \rho\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right).$$

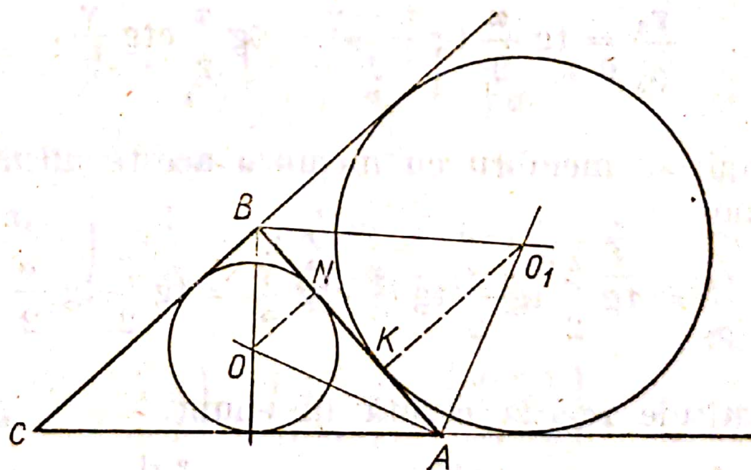


Fig. 42

Prin urmare,

$$\frac{r}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}\left(\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right) = \rho\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right).$$

Rezultă astfel că $\frac{r}{\rho} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$.

D e m o n s t r a ţ i a   e n u n ţ u l u i   p r o b l e m e i. Fie $\sphericalangle CMB = \gamma$ (fig. 43). Ţinînd seama de lema demonstrată, se găseşte

$$\frac{r_1}{\rho_1} = \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}.$$

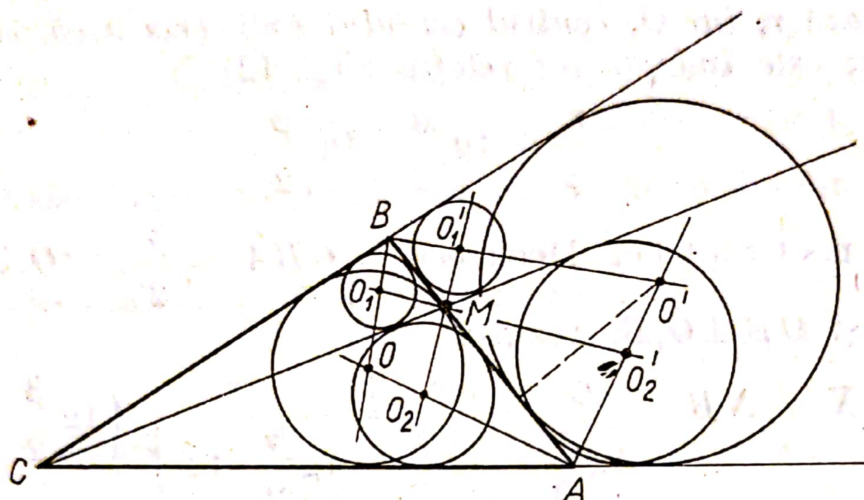


Fig. 43

Întrucît $\sphericalangle CMA = \pi - \gamma$, rezultă conform aceleiaşi leme, că

$$\frac{r_2}{\rho_2} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\pi-\gamma}{2} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}.$$

Dacă se înmulţesc membru cu membru aceste ultime două egalităţi, se obţine

$$\frac{r_1}{\rho_1}\cdot\frac{r_2}{\rho_2} = \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} = \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{\rho}.$$

ceea ce constituie relaţia cerută în enunţ.

70. $A_n = \sum_{k=0}^{n} x_k a^k,\ B_n = \sum_{k=0}^{n} x_k b^k,\ A_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} x_k a^k,\ B_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} x_k b^k.$
Prin urmare, $A_{n-1} = A_n - x_n a^n$, $B_{n-1} = B_n - x_n b^n$. Fie $a > b$, deci $a^k > b^k$ şi $\frac{1}{a^k} < \frac{1}{b^k}$, oricare ar fi $k \geqslant 1$. Deoarece $x_k > 0$ pentru

$k = n$ şi $k = n - 1$, iar $x_k \geqslant 0$, cînd $k \leqslant n - 2$, rezultă din ultimele inegalităţi $\sum_{k=0}^{n} x_{n-k}\left(\frac{1}{a^k} - \frac{1}{b^k}\right) < 0$, ceea ce inseamnă că

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{x_{k-n}}{a^k} < \sum_{k=0}^{n} \frac{x_{n-k}}{b^k},$$

adică $\frac{\sum_{k=0}^{n} x_{n-k}a^{n-k}}{a^n} < \frac{\sum_{k=0}^{n} x_{n-k}b^{n-k}}{b^n}$, sau, altfel scris, $\frac{A_n}{a^n} < \frac{B_n}{b^n}$ şi, prin urmare, $\frac{a^n}{A_n} > \frac{b^n}{B_n}$ sau $1 - \frac{x_n a^n}{A_n} < 1 - \frac{x_n b^n}{B_n}$, obţinînd în cele din urmă $\frac{A_{n-1}}{A_n} < \frac{B_{n-1}}{B_n}$.

Dacă se presupune că $\frac{A_{n-1}}{A_n} < \frac{B_{n-1}}{B_n}$, parcurgînd aceleaşi raţionamente în sens invers, se găseşte $\sum_{k=0}^{n} x_{n-k}\left(\frac{1}{a^k} - \frac{1}{b^k}\right) < 0$. Deoarece $x_{n-k} \geqslant 0$ ($x_n \neq 0$ şi $x_{n-1} \neq 0$), inegalitatea este posibilă numai cînd $a > b$.

71. a) Prin ipoteză $a_k \geqslant 1$ iar $a_{k-1} \leqslant a_k$, ceea ce înseamnă că $1 - \frac{a_{k-1}}{a_k} \geqslant 0$, deci

$$b_n = \sum_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{a_{k-1}}{a_k}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{a_k}} \geqslant 0.$$

Se demonstrează că $b_n < 2$:

$$b_n = \sum_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{a_{k-1}}{a_k}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{a_k}} = 2\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k - a_{k-1}}{a_k(2\sqrt{a_k})} \leqslant 2\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k - a_{k-1}}{a_k(\sqrt{a_k} + \sqrt{a_{k-1}})} =$$

$$= 2\sum_{k=1}^{n}\left[\left(\frac{1}{\sqrt{a_k}} + \frac{1}{\sqrt{a_{k-1}}}\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{a_{k-1}}} + \frac{\sqrt{a_{k-1}}}{a_k}\right)\right].$$

Dacă se ţine seama de inegalitatea între media aritmetică şi cea geometrică a două numere, se găseşte

$$\frac{\sqrt{a_{k-1}}}{a_k} + \frac{1}{\sqrt{a_{k-1}}} \geqslant 2\sqrt{\frac{\sqrt{a_{k-1}}}{a_k}\cdot\frac{1}{\sqrt{a_{k-1}}}} = 2\sqrt{\frac{1}{a_k}},$$

şi, în consecinţă,

$$b_n \leqslant 2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{a_{k-1}}}-\frac{1}{\sqrt{a_k}}\right)=2\left(\frac{1}{\sqrt{a_0}}-\frac{1}{\sqrt{a_n}}\right)=2\left(1-\frac{1}{\sqrt{a_n}}\right)<2.$$

b) Se demonstrează că şirul $a_n = q^n (q>1)$ satisface condiţia din enunţ. Într-adevăr, $a_0 = 1$, $a_k > a_{k-1}$, deoarece $q>1$. Termenul b_n se transformă în modul următor, folosind formula care dă suma primilor n termeni dintr-o progresie geometrică:

$$b_n = \sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{q^{k-1}}{q^k}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{q^k}} = \left(1-\frac{1}{q}\right)\frac{\frac{1}{\sqrt{q}}\left(1-\frac{1}{\sqrt{q^n}}\right)}{1-\frac{1}{\sqrt{q}}} =$$

$$= \left(1+\frac{1}{\sqrt{q}}\right)\frac{1}{\sqrt{q}}\left(1-\frac{1}{\sqrt{q^n}}\right) = \frac{\sqrt{q}+1}{q}\left(1-\frac{1}{\sqrt{q^n}}\right).$$

Conform enunţului, $c<2$, din care cauză există un număr M, astfel încît $c<M<2$ $\left(\text{de exemplu, } M=\frac{c+2}{2}\right)$. Dacă se alege q astfel încît să verifice egalitatea $\frac{\sqrt{q}+1}{q} = M$, adică luîndu-se $\sqrt{q} = \frac{1+\sqrt{1+4M}}{2M}$, se constată uşor că în cazul $0<M<2$, avem $\frac{1+\sqrt{1+4M}}{2M} > 1$, adică $\sqrt{q}>1$ şi deci $q>1$.

Se va arăta că pentru q astfel ales există un număr natural N cu proprietatea că $b_n > c$, dacă $n>N$. Dacă se pune b_n sub forma

$$b_n = \frac{\sqrt{q}+1}{q}\left(1-\frac{1}{\sqrt{q^n}}\right) = M\left(1-\frac{1}{\sqrt{q^n}}\right), \quad M>c>0,$$

inegalitatea $b_n>c$ se scrie în mod echivalent

$$q^n > \frac{M^2}{(M-c)^2},$$

găsind astfel că $n > \log_q \frac{M^2}{(M-c)^2}$, inegalitate care atrage după sine

$$N = \left[\log_q \frac{M^2}{(M-c)^2} \right].$$

72. Cel puțin unul din șase numere naturale consecutive se divide la 5. Dacă aceste numere au proprietatea din enunț, rezultă că două din acestea se divid la 5 și anume n și $n + 5$.

Se arată că produsul a două din aceste numere este mai mare decît fiecare din celelalte. Este suficient, pentru aceasta, ca $n(n+1) > n + 5$. Într-adevăr, diferența $n(n+1) - (n+5) = n^2 - 5$ este totdeauna pozitivă cînd $n \geqslant 5$, prin urmare $n(n+1) > n + 5$. Rezultă astfel că în fiecare produs intră trei și numai trei factori. În acest caz există șase posibilități de a grupa cele șase numere în două produse, ținînd seama că numărul cel mai mic n și numărul cel mai mare $n + 5$ din acestea fac parte din produse diferite (deoarece sînt divizibile la 5):

1) $n(n+1)(n+2)$ și $(n+3)(n+4)(n+5)$,

2) $n(n+1)(n+3)$ și $(n+2)(n+4)(n+5)$,

3) $n(n+1)(n+4)$ și $(n+2)(n+3)(n+5)$,

4) $n(n+2)(n+3)$ și $(n+1)(n+4)(n+5)$,

5) $n(n+2)(n+4)$ și $(n+1)(n+3)(n+5)$,

6) $n(n+3)(n+4)$ și $(n+1)(n+2)(n+5)$.

Primele cinci cazuri nu sînt posibile, deoarece fiecare din factorii primului produs sînt mai mici decît factorul corespunzător din cel de-al doilea produs și deci în fiecare din aceste cinci cazuri primul din produse este mai mic decît cel de-al doilea produs.

În cel de-al șaselea caz, $n(n+3)(n+4) = (n+1)(n+2)(n+5)$, adică $n^2 + 5n + 10 = 0$. Întrucît ecuația în n obținută nu are rădăcini pozitive, nu este posibil nici acest caz. Rezultă astfel că propoziția din enunț nu este satisfăcută pentru nici un număr întreg pozitiv.

73. Se demonstrează că muchiile opuse (de exemplu, BC și AD) sînt perpendiculare în tetraedrul dat. Muchia BC este perpendiculară pe planul AED, deoarece $AE \perp BC$, $DO \perp BC$ și, prin urmare, $BC \perp AD$ (fig. 44).

În continuare se demonstrează că unghiurile plane cu vîrful în punctul D sînt drepte. $DB \perp DC$ conform enunțului, iar $DC \perp AB$

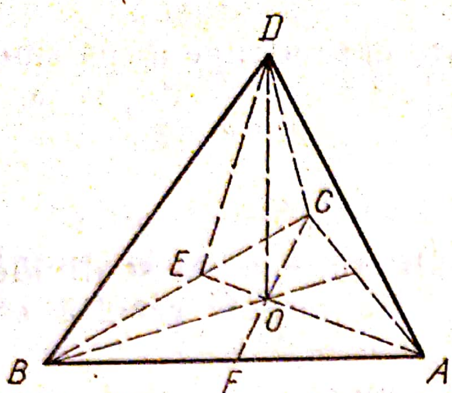


Fig. 44

deoarece sînt muchii opuse în tetraedru; DC este deci perpendiculară pe planul ABD şi, prin urmare, $DC \perp AD$. În mod analog se demonstrează că $AD \perp DB$.

Dacă în inegalitatea iniţială se exprimă membrul al doilea prin AB, BC şi AC:

$$AD^2 + BD^2 = AB^2,\ AD^2 + CD^2 = AC^2$$

$$\text{şi } BD^2 + CD^2 = BC^2,$$

se găseşte

$$(AB + BC + AC)^2 \leqslant 3(AB^2 + AC^2 + BC^2),$$

ceea ce se scrie sub forma

$$\frac{AB^2 + BC^2}{2} - AB \cdot BC + \frac{AB^2 + AC^2}{2} -$$

$$- AB \cdot AC + \frac{BC^2 + AC^2}{2} - BC \cdot AC \geqslant 0,$$

condiţie care este evident îndeplinită, deoarece $\frac{a^2 + b^2}{2} \geqslant ab$.

Inegalitatea se transformă în egalitate cînd $AB = BC = CA$.

74. L e m ă. Dacă se dau în plan cinci puncte, oricare trei din acestea nefiind situate pe aceeaşi dreaptă, se pot găsi cel puţin trei triunghiuri dreptunghice sau obtuzunghice avînd vîrfurile în aceste puncte.

Dacă înfăşurătoarea convexă a acestor puncte este un triunghi, în interiorul acestuia vor fi situate două din cele cinci puncte, fie acestea punctele D şi E (fig. 45), fiecare fiind vîrf pentru trei triunghiuri din care cel puţin două nu sînt ascuţitunghice. În consecinţă, în acest caz se găsesc cel puţin patru triunghiuri care nu sînt ascuţitunghice.

Dacă înfăşurătoarea convexă a celor cinci puncte este un patrulater convex (fig. 46), cel puţin unul din triunghiurile avînd un vîrf în aceste puncte este neascuţitunghic. Unul din cele cinci puncte, de exemplu E, este situat în interiorul patrulaterului şi deci în interiorul unuia din triunghiuri (nu este posibil ca E să fie situat pe o diagonală, deoarece, prin ipoteză, nu există trei puncte situate pe aceeaşi dreaptă). Fie ABC triunghiul în interiorul căruia se găseşte

punctul E. Cel puţin două din triunghiurile ABE, BEC şi AEC vor fi neascuţitunghice. Prin urmare, în acest caz se vor găsi cel puţin trei triunghiuri neascuţitunghice.

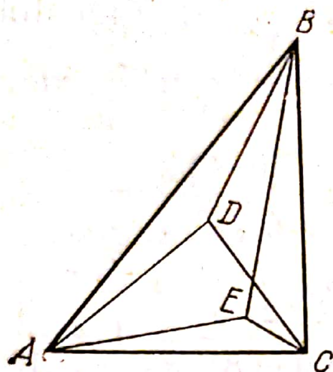


Fig. 45

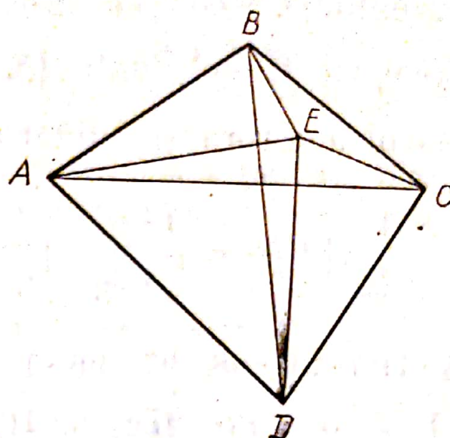


Fig. 46

Se consideră, în fine, cazul cînd înfăşurătoarea convexă a celor cinci puncte este un pentagon convex. Suma unghiurilor într-un pentagon convex este de $3 \cdot 180° = 540°$, deci cel puţin două unghiuri ale pentagonului nu sînt ascuţite.

Dacă vîrfurile a două unghiuri neascuţite formează o latură a pentagonului (fie aceasta AB), se consideră patrulaterul $BCDE$ (fig. 47), care are cel puţin unul din unghiuri neascuţit. În acest caz se vor găsi cel puţin trei triunghiuri neascuţitunghice.

Dacă vîrfurile unghiurilor neascuţite A şi C nu formează o latură a pentagonului (fig. 48), se consideră patrulaterul $ACDE$, care are cel puţin un unghi neascuţit, găsindu-se şi de această dată cel puţin trei triunghiuri neascuţitunghice, lema fiind astfel complet demonstrată.

Din cele 100 puncte, se pot forma, conform lemei, un număr de $3 \cdot C_{100}^5$ triunghiuri neascuţitunghice. Unul şi acelaşi triunghi poate avea vîrfurile în grupe diferite de cîte cinci puncte, în general

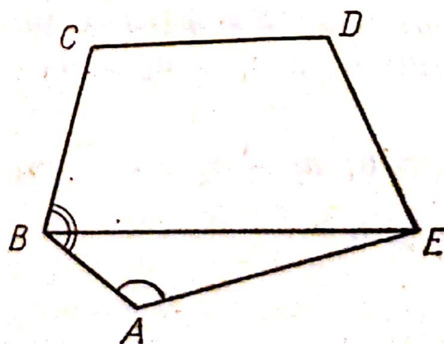


Fig. 47

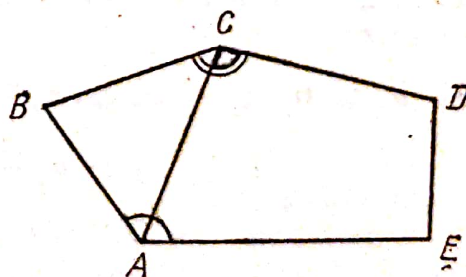


Fig. 48

fiind posibilă apartenența sa la C_{97}^2 astfel de grupe. În acest mod se pot găsi cel puțin $\frac{3 \cdot C_{100}^5}{C_{97}^2}$ triunghiuri neascuțitunghice din totalul de C_{100}^3 triunghiuri, ceea ce înseamnă că numărul triunghiurilor ascuțitunghice va fi cel mult $C_{100}^3 - \frac{3 \cdot C_{100}^5}{C_{97}^2}$. Calculînd raportul dintre numărul acestora și numărul total de triunghiuri, se obține

$$\frac{1}{C_{100}^3}\left(C_{100}^3 - \frac{3 \cdot C_{100}^5}{C_{97}^2}\right) = 1 - \frac{3 \cdot C_{100}^5}{C_{97}^2\, C_{100}^3} =$$

$$= 1 - \frac{3 \cdot 100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot 97 \cdot 96 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 97 \cdot 96 \cdot 100 \cdot 99 \cdot 98} = 1 - \frac{3}{10} = 0{,}7,$$

ceea ce trebuia demonstrat.

75. Se demonstrează că afirmația este adevărată pentru $n = 3$. Membrul întîi al inegalității devine

$$(a_1 - a_2)(a_1 - a_3) + (a_2 - a_1)(a_2 - a_3) + (a_3 - a_1)(a_3 - a_2) =$$

$$= a_1^2 - a_1a_3 - a_1a_2 + a_2a_3 + a_2^2 - a_2a_3 - a_1a_2 + a_1a_3 +$$

$$+ a_3^2 - a_2a_3 - a_1a_3 + a_1a_2 = a_1^2 - a_1a_3 - a_1a_2 + a_2^2 -$$

$$- a_2a_3 + a_3^2 = \frac{1}{2}[(a_1 - a_2)^2 + (a_2 - a_3)^2 + (a_3 - a_1)^2].$$

Expresia obținută este nenegativă, oricare ar fi numerele a_1, a_2, a_3. Afirmația este deci adevărată în cazul $n = 3$.

Dacă $n = 5$, se procedează în modul următor. Deoarece membrul întîi al inegalității este simetric în a_i și a_j $(i \neq j)$, este posibil, fără a restrînge generalitatea, să se considere că $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant a_4 \geqslant a_5$. În acest caz

$$a_1 - a_2 \geqslant 0,\ a_1 - a_3 \geqslant a_2 - a_3 \geqslant 0,\ a_1 - a_4 \geqslant a_2 - a_4 \geqslant 0,$$

$$a_1 - a_5 \geqslant a_2 - a_5 \geqslant 0,$$

deci

$$(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)(a_1-a_5)+(a_2-a_1)(a_2 - a_3)(a_2-a_4)(a_2-a_5)\geqslant 0.$$

Analog

$$(a_4 - a_1)(a_4 - a_2)(a_4 - a_3)(a_4 - a_5) +$$
$$+ (a_5 - a_1)(a_5 - a_2)(a_5 - a_3)(a_5 - a_4) \geqslant 0.$$

În fine, $(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)(a_3 - a_4)(a_3 - a_5) \geqslant 0$, fiind un produs de doi factori nepozitivi și doi factori nenegativi, ceea ce arată valabilitatea întregii inegalități pentru $n = 5$.

Faptul că inegalitatea nu este adevărată pentru alte valori ale lui $n > 2$ se arată construind exemple. Pentru $n = 4$ un astfel de exemplu îl constituie numerele $a_1 = 0$ și $a_2 = a_3 = a_4 = 1$, iar pentru $n > 5$ exemplul este dat de numerele $a_1 = a_2 = \ldots = a_{n-4} = 0$ și $a_{n-3} = a_{n-2} = a_{n-1} = 2$, $a_n = 1$.

76. Se notează cu P poliedrul obținut din P_1 cu ajutorul unei omotetii de centru A_1 și avînd raportul 2. Se observă ușor că toate poliedrele $P_1, P_2, \ldots, P_9$ sînt incluse în P. Fie, de exemplu, $X \in P_2$. Există atunci punctul $Y \in P$, astfel ca X să fie transformatul lui Y în translația care duce A_1 în A_2. Considerînd paralelogramul A_1A_2XY (fig. 49), se constată că punctul Z de intersecție al diagonalelor sale aparține lui P_1, deoarece $A_2 \in P_1$, $Y \in P_1$, iar P_1 este poliedru convex. Punctul X se obține însă din punctul Z printr-o omotetie de centru A_1 și raport 2, ceea ce înseamnă că $X \in P$.

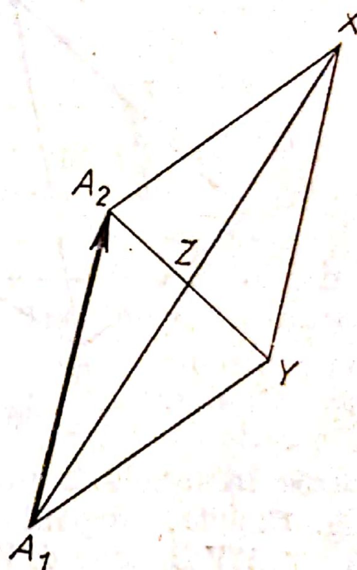


Fig. 49

În acest mod, poliedrul P, al cărui volum $V(P)$ este de opt ori mai mare decît volumul $V(P_1)$ al poliedrului P_1, include cele nouă poliedre care au fiecare volumul $V(P_1)$. Deci cel puțin două din poliedrele acestea au în comun un punct interior, ceea ce trebuia demonstrat.

77. Demonstrația afirmației din enunț se face din aproape în aproape.

Fie k numere

$$a_1 = 2^{n_1} - 3,\ a_2 = 2^{n_2} - 3,\ \ldots,\ a_k = 2^{n_k} - 3,$$

relativ prime între ele două cîte două, iar $2 = n_1 < n_2 < \ldots < n_k$. Se construiește numărul $a_{k+1} = 2^{n_{k+1}} - 3$, relativ prim cu fiecare din aceste numere. Fie $l = a_1a_2 \ldots a_k$. Printre cele $l + 1$ numere $2^0, 2^1, \ldots, 2^l$ se găsesc cel puțin două care împărțite la l dau ace-

laşi rest. Fie aceste numere 2^r şi 2^s $(r > s)$. Se poate găsi atunci numărul natural p astfel ca $pl = 2^r - 2^s = (2^{r-s} - 1)2^s$. Deoarece l este impar, rezultă că $2^{r-s} - 1$ se divide la l, adică se găseşte q aşa ca $2^{r-s} - 1 = ql$. În acest caz $2^{r-s+2} - 3 = 4 \cdot 2^{r-s} - 3 = 4(lq + 1) - 3 = 4ql + 1$, număr care se ia drept a_{k+1}, deoarece nu are, evident, divizori comuni cu l, deci cu nici unul din numerele $a_1, a_2, \ldots, a_k$, iar $a_{k+1} > a_k$. Se pot construi astfel oricîte numere cu proprietatea cerută.

78. a) Prin reducere la absurd, se presupune că există linia poligonală minimă $XYZTX$ (fig. 50). Feţele ABC şi BCD se desfăşoară în acelaşi plan, obţinîndu-se patrulaterul convex $ABDC$ (fig. 51). Din faptul că linia poligonală are lungimea minimă, rezultă că $\sphericalangle XYB = \sphericalangle ZYC$, întrucît în caz contrar se poate obţine o lungime mai mică prin deplasarea punctului Y. Raţionamente analoage arată că

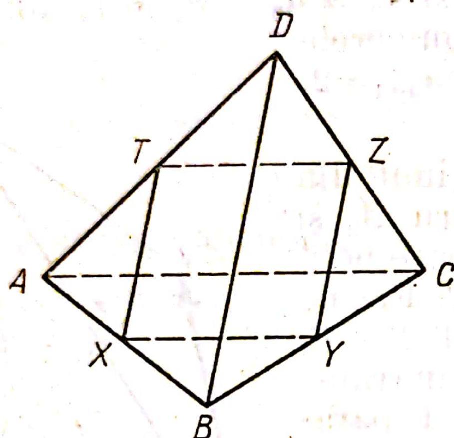


Fig. 50

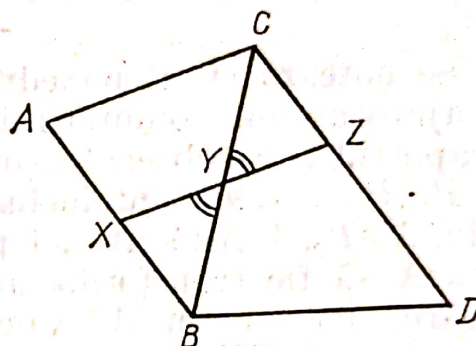


Fig. 51

$$\sphericalangle YZC = \sphericalangle TZD, \quad \sphericalangle ZTD = \sphericalangle XTA, \quad \sphericalangle TXA = \sphericalangle YXB.$$

Se constată, în acest mod, că

$$\sphericalangle DAB + \sphericalangle BCD = 180° - \sphericalangle TXA - \sphericalangle XTA + 180° - \sphericalangle YZC - \sphericalangle ZYC = 180° - \sphericalangle YXB - \sphericalangle XYB + 180° - \sphericalangle ZTD - \sphericalangle TZD = \sphericalangle ABC + \sphericalangle ADC,$$

ceea ce contrazice condiţia impusă de enunţ pentru punctul a).

b) Se consideră cazul

$$\sphericalangle DAB + \sphericalangle BCD = \sphericalangle ABC + \sphericalangle ADC. \tag{1}$$

Unghiul α care este dat în enunţul problemei este suma tuturor unghiurilor plane care au vîrful în punctul A. În mod analog se va

nota cu β, γ, respectiv cu δ suma unghiurilor plane care au vîrful în punctele B, C, D.

Deoarece $\sphericalangle BAD + \sphericalangle BAC + \sphericalangle CAD = \alpha$ și $\sphericalangle ACB + \sphericalangle ACD + \sphericalangle BCD = \gamma$, se deduce, luînd în considerație relația (1), că

$$\alpha + \gamma = \sphericalangle BAD + \sphericalangle BAC + \sphericalangle CAD + \sphericalangle ACB + \sphericalangle ACD + \sphericalangle BCD = \sphericalangle ABC + \sphericalangle ADC + \sphericalangle BAC + \sphericalangle CAD + \sphericalangle ACB + \sphericalangle ACD = (\sphericalangle ABC + \sphericalangle BAC + \sphericalangle ACB) + (\sphericalangle ADC + \sphericalangle CAD + \sphericalangle ACD) = 360°,$$

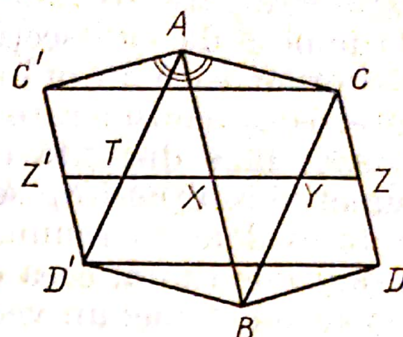


Fig. 52

adică $\alpha + \gamma = 360°$. În mod analog se găsește că $\beta + \delta = 360°$. Rezultă astfel că cel puțin unul din unghiurile α și γ și cel puțin unul din unghiurile β și δ nu depășește 180°. Fie α și β aceste unghiuri. Se taie tetraedrul $ABCD$ de-a lungul muchiilor AC, CD și DB și se desfășoară (dacă unghiurile care nu depășesc 180° ar fi altele, tetraedrul ar fi fost tăiat de-a lungul altor muchii astfel ca linia poligonală care descrie tăietura să aibă extremitățile în vîrfurile acestor unghiuri). Se obține desfășurarea $AC'D'BDC$ (fig. 52) compusă din triunghiurile $AC'D'$, ABD', ABC și BCD. Din egalitatea (1) se găsește că segmentele CD și $C'D'$ sînt paralele și la fel orientate, deci $CDD'C'$ este paralelogram și, considerînd triunghiul isoscel ACC', rezultă că $CC' = 2AC \sin \frac{\alpha}{2}$. Întrucît s-a făcut presupunerea că unghiurile α și β nu depășesc 180°, înseamnă că paralelogramul $CDD'C'$ este inclus în întregime în figura $AC'D'BDC$ și fiecărui segment ZZ' paralel cu segmentul CC' de aceeași lungime îi corespunde linia poligonală $XYZTX$ de lungime minimă.

79. Mulțimea căutată de puncte va fi construită prin inducție. Pentru $m = 1$ o astfel de mulțime este constituită din două puncte situate unul față de celălalt la o distanță egală cu 1.

Se consideră că a fost construită o astfel de mulțime de puncte în cazul cînd $m = k$, fie aceasta S_k. Cu ajutorul lui S_k se va construi mulțimea care corespunde cazului $m = k + 1$. Este evident că problema va fi rezolvată dacă se găsește o translație de vector unitate a lui S_k astfel încît mulțimea S'_k obținută ca rezultat al acestei translații să nu aibă puncte comune cu S_k și oricare punct al lui S'_k să se găsească la distanța 1 față de un singur punct al mulțimii

S_k şi anume faţă de cel din care a provenit prin translaţie. Mulţimea căutată S_{k+1} va fi atunci reuniunea mulţimilor S_k şi S'_k. Se arată că există o astfel de translaţie. Se construiesc toate cercurile avînd lungimea razei egală cu 1 iar centrele în punctele mulţimii S_k. Fiecare cerc care are centrul într-un punct $X \in S_k$ are un număr finit de puncte de intersecţie cu celelalte cercuri. Se consideră mulţimea vectorilor care au originea în punctul X iar vîrfurile în punctele de intersecţie considerate mai sus sau în alte puncte ale mulţimii S_k situate la o distanţă egală cu 1 faţă de punctul X. Pentru fiecare punct al mulţimii S_k se formează cîte o astfel de mulţime de vectori. Este evident că reuniunea tuturor acestor mulţimi de vectori va fi o mulţime finită, ceea ce înseamnă că se poate găsi un vector unitate neparalel cu nici un vector din această mulţime. Este uşor de arătat, în continuare, că un astfel de vector determină translaţia căutată.

80. Se consideră sumele elementelor din fiecare linie şi sumele elementelor din fiecare coloană. Fie p valoarea cea mai mică pe care o iau aceste sume. Dacă $p \geqslant n$, afirmaţia din enunţ este evidentă. Se va considera deci cazul $p < n$. Întrucît schimbarea între ele a două linii sau a două coloane nu modifică sumele considerate, se va presupune că suma elementelor din prima linie este egală cu p şi că în această linie pe primele locuri se găsesc elementele care sînt nule, iar pe următoarele elementele nenule. Deoarece $p < n$, în prima linie nu se pot afla mai puţin de $n - p$ zerouri. Se poate deduce, pe baza inegalităţii date în enunţ, că suma elementelor pe fiecare din primele $n - p$ coloane nu este mai mică decît $n - p$, iar suma tuturor elementelor din aceste coloane nu este mai mică decît $(n - p)^2$. Suma tuturor elementelor din ultimele p coloane nu este mai mică decît p^2. Suma S a tuturor elementelor tabloului satisface deci inegalitatea

$$S_n \geqslant (n - p)^2 + p^2 = \frac{n^2}{2} + \frac{(n - 2p)^2}{2} \geqslant \frac{n^2}{2},$$

ceea ce trebuia demonstrat.

81. Se observă mai întîi că nu este esenţială condiţia ca grupele să fie disjuncte, deoarece dacă se găsesc două grupe nedisjuncte de numere a căror sumă este aceeaşi, atunci, lăsînd la o parte elementele comune lor, se obţin două grupe disjuncte cu sume egale.

Se calculează, în continuare, numărul grupelor diferite care se pot forma cu cele zece numere. Fiecare dintre acestea poate aparţine sau nu unei grupe, de aceea se pot forma astfel 2^{10} grupe distincte, printre care a fost numărată şi grupa care nu conţine nici un număr.

Excluzînd această grupă, numărul grupelor diferite va fi $2^{10} - 1 = 1\,023$. Întrucît fiecare număr din grupă nu depășește 99, iar numerele ce formează o grupă nu sînt mai multe decît 10, suma numerelor din fiecare grupă nu depășește $99 \cdot 10 = 990$, adică nu există mai mult de 990 sume distincte. Se deduce astfel că printre cele 1 023 grupe există și unele pentru care sumele numerelor care le formează coincid.

82. Fie $\hat{A}$ cel mai mic unghi al patrulaterului $ABCD$. Din punctul A se duce o semidreaptă situată în interiorul unghiului BAD, iar pe aceasta se ia punctul A_1 aflat suficient de aproape de punctul A, astfel ca dreptele care trec prin punctul A_1 și sînt paralele cu laturile AB, respectiv cu AD să intersecteze laturile BC și CD în punctele B_1, respectiv D_1 (fig. 53) iar pe laturile AB și AD să se găsească punctele L, respectiv K, în așa fel ca $\sphericalangle A_1LB = \sphericalangle ABC$, iar $\sphericalangle A_1KD = \sphericalangle CDA$. Dacă unul din unghiurile B sau D este obtuz ($\hat{B}$, în figură), ultima egalitate este posibilă pe baza apropierii suficiente a punctului A_1 de A.

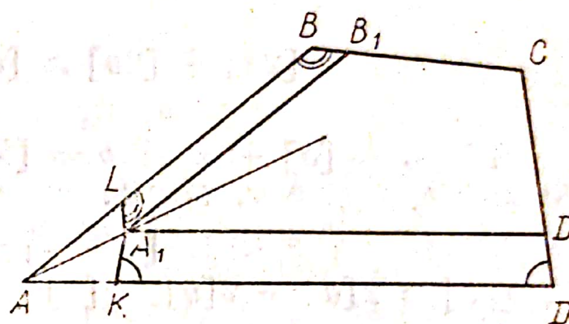


Fig. 53

În cazul unui unghi ascuțit (pe figură, D) aceasta este posibil deoarece A este cel mai mic. Trapezele isoscele A_1LBB_1 și A_1KDD_1 sînt inscriptibile. Unghiurile patrulaterului $A_1B_1CD_1$ sînt respectiv egale cu unghiurile patrulaterului inițial, de aceea patrulaterul $A_1B_1CD_1$ este de asemenea inscriptibil. În sfîrșit, patrulaterul ALA_1K este de asemenea inscriptibil, deoarece $\sphericalangle ALA_1 + \sphericalangle AKA_1 = (180° - \hat{B}) + (180° - D) = 180°$.

Astfel, afirmația din enunț a fost demonstrată pentru $n = 4$. Întrucît în descompunerea obținută intră un trapez isoscel care se poate la rîndul său descompune într-un număr arbitrar de trapeze isoscele, rezultă adevărul afirmației din enunț pentru orice $n > 4$.

83. Se arată că puterea cea mai mare a unui număr prim p, la care se divide numărătorul fracției date nu este mai mică decît puterea cea mai mare a aceluiași număr prim p la care se divide numitorul fracției date, fapt care arată că fracția reprezintă un număr întreg.

L e m a I. Fie numărul prim p și numerele naturale n și k astfel ca $p^{k+1} > n$. Numărul p intră în acest caz în descompunerea lui

$n!$ în factori primi la puterea dată de exponentul $\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right] + \ldots + \left[\frac{n}{p^k}\right]$, prin $[a]$ înțelegînd partea întreagă a numărului a.

Demonstrația acestei leme este propusă cititorului.

Lema II (exprimînd o proprietate a numerelor întregi). Fie două numere nenegative a și b. Acestea satisfac inegalitatea

$$[2a] + [2b] \geqslant [a] + [b] + [a + b].$$

Fie $a = [a] + \alpha$ și $b = [b] + \beta$, α și β satisfăcînd condițiile $0 \leqslant \alpha < 1$ și $0 \leqslant \beta < 1$.

Dacă $\alpha + \beta < 1$, $[a + b] = [a] + [b]$ și în consecință $[2a] + [2b] \geqslant 2[a] + 2[b] = [a] + [b] + [a + b]$.

În cazul în care $\alpha + \beta \geqslant 1$, sau $2\alpha \geqslant 1$, sau $2\beta \geqslant 1$.

Fie, de exemplu, $2\alpha \geqslant 1$ (cazul $2\beta \geqslant 1$ se studiază analog). Atunci $[a + b] = [a] + [b] + 1$ și $[2a] = 2[a] + 1$. De aceea $[2a] + [2b] \geqslant 2[a] + 1 + 2[b] = [a] + [b] + [a + b]$, ceea ce încheie demonstrarea lemei II.

Se consideră, în continuare, un număr prim p oarecare și k suficient de mare pentru ca $p^{k+1} > 2n$ și $p^{k+1} > 2m$. Rezultă că $p^{k+1} > m + n$. Aplicînd lema I, se obține că numărul p este factor al numărătorului fracției date, avînd exponentul

$$s = \left[\frac{2n}{p}\right] + \left[\frac{2n}{p^2}\right] + \ldots + \left[\frac{2n}{p^k}\right] + \left[\frac{2m}{p}\right] + \left[\frac{2m}{p^2}\right] + \ldots + \left[\frac{2m}{p^k}\right],$$

fiind în același timp și factor al numitorului aceleiași fracții, avînd exponentul

$$t = \left[\frac{m}{p}\right] + \left[\frac{m}{p^2}\right] + \ldots + \left[\frac{m}{p^k}\right] + \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \ldots$$

$$\ldots + \left[\frac{n}{p^k}\right] + \left[\frac{m+n}{p}\right] + \left[\frac{m+n}{p^2}\right] + \ldots + \left[\frac{m+n}{p^k}\right].$$

Aplicînd, în continuare, lema II numerelor $a = \dfrac{m}{p^i}$ și $b = \dfrac{n}{p^i}$, se obține

$$\left[\frac{2m}{p^i}\right] + \left[\frac{2n}{p^i}\right] \geqslant \left[\frac{m}{p^i}\right] + \left[\frac{n}{p^i}\right] + \left[\frac{m+n}{p^i}\right].$$

Adunînd toate aceste inegalități pentru $i = 1, 2, 3, \ldots, k$, se obține că $s \geqslant t$, deci numărătorul fracției din enunț este divizibil cu numitorul acelei fracții.

84. Este evident că

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = a \qquad (1)$$

este soluție a sistemului dat pentru orice număr real a. Se va arăta că nu există alte soluții ale acestui sistem. Fie numerele x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, care satisfac sistemul dat. Din cauză că sistemul dat este invariant la o permutare ciclică a variabilelor x_k, se poate considera, fără a restrînge generalitatea, că x_1 este cel mai mare din cele cinci numere x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, adică $x_1 \geqslant x_k$, $k = 1, 2, 3, 4, 5$. Evident că, în această situație, $x_1^2 - x_3x_5 \geqslant 0$ și $x_2^1 - x_2x_4 \geqslant 0$. Folosind prima și cea de-a cincea inegalitate, se obține $x_2^2 - x_3x_5 \leqslant 0$ și $x_5^2 - x_2x_4 \leqslant 0$, ceea ce arată că dacă numerele x_2, x_3, x_4, x_5 nu sînt toate egale între ele, nici x_2 și nici x_5 nu pot fi cele mai mari dintre acestea. Înseamnă că cele mai mari dintre numerele x_2, x_3, x_4, x_5 pot fi numai x_3 sau x_4. Se verifică ușor însă că sistemul dat de inegalități este invariant față de permutarea lui x_3 cu x_4 simultan cu permutarea lui x_2 cu x_5. Se poate considera, din această cauză, că x_3 este cel mai mare dintre numerele x_2, x_3, x_4, x_5. Astfel, $x_1 \geqslant x_3 \geqslant x_i$, $i = 2, 4, 5$. Se obține atunci că $x_1x_3 \geqslant x_4^2$ și $x_1x_3 \geqslant x_5^2$ și, ținînd seama de cea de-a patra inegalitate, se obține $(x_4^2 - x_1x_3)(x_5^2 - x_1x_3) = 0$. Rezultă că sau $x_1x_3 = x_4^2$ sau $x_1x_3 = x_5^2$. Avînd în vedere cea de-a treia inegalitate, se găsește că sau $x_1 = x_3 = x_4$, sau $x_1 = x_3 = x_5$. În primul caz dacă cel puțin unul din numerele x_2 și x_5 este strict mai mic decît $x_1 = x_3 = x_4$, este contrazisă cea de-a treia inegalitate. În consecință în acest caz, cele cinci numere trebuie să fie egale între ele. În al doilea caz numărul x_5 este cel mai mare printre numerele x_2, x_3, x_4, x_5, ceea ce, așa cum s-a observat, este posibil numai dacă aceste patru numere sînt egale. Dar $x_1 = x_3$, deci cele cinci numere sînt egale între ele. În toate aceste situații este adevărată relația (1), deci sistemul dat nu admite decît soluții de această formă.

85. Demonstrația se face prin reducere la absurd, presupunîndu-se că într-un punct oarecare y_0, $|g(y_0)| = a > 1$. Se alege punctul x_0 astfel ca $f(x_0) \neq 0$ și se definește prin recurență șirul $\{x_k\}$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$) în modul următor:

$$x_{k+1} = \begin{cases} x_k + y_0, & \text{dacă } |f(x_k + y_0)| \geqslant |f(x_k - y_0)|, \\ x_k - y_0, & \text{dacă } |f(x_k + y_0)| < |f(x_k - y_0)|. \end{cases}$$

Folosind ecuația dată de enunțul problemei, se obține

$$2|f(x_{k+1})| \geqslant f(x_k + y_0)| + |f(x_k - y_0)| \geqslant |f(x_k + y_0) +$$
$$+ f(x_k - y_0)| = 2|f(x_k)| \cdot |g(y_0)| = 2a|f(x_k)|.$$

Astfel, $|f(x_{k+1})| \geqslant a|f(x_k)|$, $a > 1$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ În acest mod se obține că $|f(x_k)| \geqslant a^k \cdot |f(x_0)|$. Deoarece $f(x_0) \neq 0$ și $a > 1$, se poate găsi un astfel de număr natural k, pentru care $a^k|f(x_0)| > 1$ și deci $|f(x_k)| > 1$, ceea ce contrazice ipoteza. Contradicția obținută arată că $|g(y)| \leqslant 1$ pentru orice y.

86. Se formulează mai întîi următoarea afirmație.

L e m ă. Dacă într-un plan sînt date trei drepte paralele diferite, se poate construi un triunghi echilateral ale cărui vîrfuri sînt situate cîte unul pe fiecare din cele trei drepte.

Demonstrarea lemei este propusă cititorului.

Se observă în continuare că lungimea laturii triunghiului echilateral construit în condițiile lemei nu depinde de modul în care este construit și este determinată unic de distanțele dintre cele trei drepte paralele. Se poate trece, mai departe, la abordarea problemei din enunț.

Fie P_0, P_1, P_2 și P_3 planele paralele date, presupunînd, fără a restrînge generalitatea, că planele P_1, P_2 și P_3 sînt situate de o aceeași parte a planului P_0, iar distanțele de la acestea la planul P_0 sînt respectiv ρ_1, ρ_2 și ρ_3 ($0 < \rho_1 < \rho_2 < \rho_3$).

Fie planul arbitrar Q_α, care formează unghiul diedru α ($\alpha \neq 0$) cu planul P_0. Lema demonstrată este aplicabilă dreptelor paralele l_0^α, l_1^α, l_2^α, care sînt intersecțiile planului Q_α cu planele P_0, P_1 și P_2. Se constată că distanțele de la dreapta l_0^α la dreptele l_1^α și l_2^α sînt respectiv $\dfrac{\rho_1}{\sin\alpha}$ și $\dfrac{\rho_2}{\sin\alpha}$. Triunghiul echilateral care se construiește conform lemei se notează prin $A_\alpha B_\alpha C_\alpha$ ($A_\alpha \in P_0$, $B_\alpha \in P_1$, $C_\alpha \in P_2$) și are lungimea laturii a_α. Dacă planul Q_α este transformat printr-o omotetie de centru A_α și raport $k = \sin\alpha$, transformatul

triunghiului $A_\alpha B_\alpha C_\alpha$ va avea latura de lungime $a_\alpha \sin \alpha$, iar vîrfurile situate pe trei drepte paralele, astfel încît două din aceste drepte se află la distanţele ρ_1 şi ρ_2 respectiv faţă de cea de-a treia. Lungimea laturii acestui triunghi este unic determinată de ρ_1 şi ρ_2 şi se poate exprima uşor în funcţie de acestea. Pentru rezolvarea problemei este însă suficient să se observe că această lungime este constantă pentru o poziţie dată a planelor paralele considerate. Dacă se notează această lungime cu a, atunci $a_\alpha \sin \alpha = a$ şi deci

$$a_\alpha = \frac{a}{\sin \alpha}.$$

În continuare va fi calculată distanţa de la centrul O_α al triunghiului $A_\alpha B_\alpha C_\alpha$ la planul P_0. Considerînd planul care trece prin dreapta $B_\alpha C_\alpha$ şi este perpendicular pe planul P_0, se observă că distanţa de la mijlocul E_α al laturii $B_\alpha C_\alpha$ la planul P_0 este $\frac{\rho_1 + \rho_2}{2}$. De aceea, ducînd prin dreapta $A_\alpha E_\alpha$ planul perpendicular pe P_0 şi ţinînd seama de faptul că $A_\alpha O_\alpha = \frac{2}{3} A_\alpha E_\alpha$, se găseşte că distanţa de la punctul O_α la planul P_0 este $\frac{2}{3} \cdot \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} = \frac{\rho_1 + \rho_2}{3}$, fiind deci independentă de unghiul α. În acest mod, centrele tuturor triunghiurilor echilaterale cu vîrfurile în planele P_0, P_1, P_2 sînt situate în acelaşi plan S, aflat la o distanţă fixă h de planul P_0 şi deci şi de planul P_3.

Se construieşte apoi tetraedrul regulat $A_\alpha B_\alpha C_\alpha D_\alpha$, avînd $\Delta A_\alpha B_\alpha C_\alpha$ ca bază, iar drept punct D_α se alege din cele două poziţii posibile ale acestuia pe cea care este mai îndepărtată de planul P_0. Înălţimea $D_\alpha O_\alpha$ a acestui tetraedru este egală cu $\sqrt{\frac{2}{3}}\, a_\alpha$, după cum arată un calcul simplu. Prin $D_\alpha O_\alpha$ se duce planul perpendicular pe planul P_0. Dacă se notează cu p_0, p_1, p_2, p_3 şi s dreptele după care acest plan intersectează planele P_0, P_1, P_2, P_3 şi S (fig. 54), rezultă că punctul D_α este situat faţă de planul S la o distanţă egală cu

$$\sqrt{\frac{2}{3}}\, a_\alpha \cos \alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}\, a \operatorname{ctg} \alpha.$$

Pentru ca vîrful D_α al tetraedrului $A_\alpha B_\alpha C_\alpha D_\alpha$ să fie situat în planul P_3, condiţia necesară şi suficientă este, evident, ca distanţa

astfel găsită să fie egală cu h, adică $\operatorname{ctg} \alpha = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{h}{a}$. Întrucît se poate determina unghiul α în așa fel ca această egalitate să fie satisfăcută, înseamnă că este asigurată existența unui astfel de tetraedru. Mai mult, formula obținută permite construcția concretă a unui astfel de tetraedru cînd este dată poziția celor patru plane paralele.

87. Rezolvarea I. Demonstrația poate fi făcută cu ajutorul inducției complete. Pentru $n = 1$ afirmația este evidentă. Se presupune că inegalitatea este satisfăcută pentru $n = k$ arbitrar și se va demonstra că este satisfăcută și pentru $n = k + 2$ (deoarece n este un număr impar înseamnă că numerele k și $k + 2$ sînt consecutive în șirul valorilor lui n).

Se orientează dreapta l și se renumerotează vectorii dați în ordinea creșterii unghiului (măsurat în sens trigonometric) pe care aceștia îl formează cu sensul pozitiv al dreptei orientate l (fig. 55). Se arată că folosind această numerotare este adevărată inegalitatea

$$|\overrightarrow{OP}_1 + \overrightarrow{OP}_2 + \ldots + \overrightarrow{OP}_k + \overrightarrow{OP}_{k+1} + \overrightarrow{OP}_{k+2}| \geqslant$$

$$\geqslant |\overrightarrow{OP}_2 + \ldots + \overrightarrow{OP}_k + \overrightarrow{OP}_{k+1}|. \qquad (1)$$

Dacă punctele P_1 și P_{k+2} sînt ambele situate pe dreapta l, iar suma $\overrightarrow{OP}_1 + \overrightarrow{OP}_{k+2}$ degenerează într-un punct (fiind dată de vec-

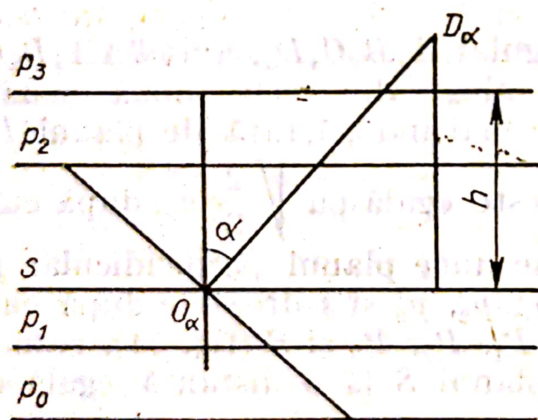


Fig. 54

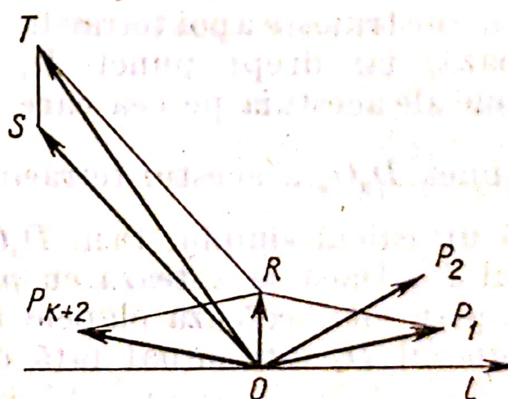


Fig. 55

torul nul $\vec{0}$), vectorii al căror modul formează membrii inegalității considerate coincid, deci inegalitatea este evidentă. În continuare se va considera că cel puțin unul din punctele P_1 și P_{k+2} nu este

situat pe dreapta l. Suma vectorilor $\overrightarrow{OP_1}$ şi $\overrightarrow{OP_{k+2}}$ va fi în acest caz vectorul nenul $\overrightarrow{OR}$ format de diagonala orientată a rombului de laturi $\overrightarrow{OP_1}$ şi $\overrightarrow{OP_{k+2}}$. De aceea nici unul din unghiurile P_1OR şi ROP_{k+2} nu este mai mare decît $\frac{\pi}{2}$. Dacă se notează $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OP_2} + \ldots$ $\ldots + \overrightarrow{OP_k} + \overrightarrow{OP_{k+1}}$, ţinînd seama de modul în care au fost renumerotaţi vectorii, rezultă că vectorul $\overrightarrow{OS}$ este situat fie în interiorul unghiului P_1OR, fie în interiorul unghiului ROP_{k+2} şi, prin urmare, unghiul ROS este ascuţit. Suma $\overrightarrow{OR} + \overrightarrow{OS}$ este reprezentată de diagonala orientată OT a paralelogramului respectiv şi deoarece în triunghiul OST unghiul OST este obtuz, înseamnă că cea mai mare latură în acest triunghi este OT, adică $|\overrightarrow{OT}| > |\overrightarrow{OS}|$, ceea ce demonstrează inegalitatea (1). Fiindcă $|\overrightarrow{OP_2} + \ldots + \overrightarrow{OP_k} + \overrightarrow{OP_{k+1}}| \geqslant 1$, conform presupunerii de la inducţie, rezultă din (1) că

$$|\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} + \ldots + \overrightarrow{OP_{k+1}} + \overrightarrow{OP_{k+2}}| \geqslant 1.$$

Conform principiului inducţiei complete înseamnă că inegalitatea considerată este valabilă pentru orice valori impare ale lui n.

R e z o l v a r e a II. Se observă că dacă se dă un cerc de centru O, un punct M în planul său, diferit de punctul O, şi punctele P_1 şi P_2 situate la intersecţia diametrului OM cu cercul, astfel ca $MP_1 \geqslant$ $\geqslant MP_2$, dacă un punct Q descrie unul din semicercurile P_2P_1, distanţa MQ creşte monoton de la MP_2 la MP_1. De aceea, dacă Γ este un arc de cerc cu centrul în punctul O şi cu extremităţile în A şi B, iar M este un punct în planul lui Γ, astfel ca punctul P_2 corespunzător să nu se afle pe Γ, atunci punctul de pe Γ cel mai apropiat de M este sau punctul A sau punctul B. Fie n vectori (fără a se cere ca n să fie impar) $\overrightarrow{OP_1}, \ldots, \overrightarrow{OP_n}$, de lungime 1, situaţi în acelaşi semiplan. Fie $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP_1} + \ldots + \overrightarrow{OP_{n-1}}$. Dacă $P_1, \ldots$ $\ldots, P_{n-1}$ rămîn fixaţi, iar P_n variază în acel semiplan astfel încît $|\overrightarrow{OP_n}| = 1$, atunci punctul S definit prin relaţia

$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OP_1} + \ldots + \overrightarrow{OP_{n-1}} + \overrightarrow{OP_n}$$

va descrie semicercul de rază 1 cu centrul în R, avînd extremitățile în A și B pe o paralelă la l și situat în semiplanul inițial considerat față de l. Se remarcă faptul că punctul R este situat în semiplanul inițial.

Din cauza poziției semicercului, punctul de pe acesta care este cel mai apropiat de O este sau A sau B. Se deduce astfel că dacă $\overrightarrow{OP_1}, \ldots, \overrightarrow{OP_n}$ sînt n vectori de lungime 1 situați în același semiplan determinat de l, atunci înlocuind unul din ei (de exemplu $\overrightarrow{OP_n}$) cu un vector de lungime 1 situat pe l, este posibil ca $|\overrightarrow{OP_1} + \ldots + \overrightarrow{OP_n}|$ să fie micșorat. Aceasta reduce problema la cazul cînd vectorii $\overrightarrow{OP_k}$ sînt toți situați pe l, deci $\overrightarrow{OP_k} = \varepsilon_k \vec{v}$, $\varepsilon_k = \pm 1$ iar $\vec{v}$ este un vector de lungime 1 așezat în sensul dreptei orientate l. În acest caz $\overrightarrow{OP_1} + \ldots + \overrightarrow{OP_n} = (\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n)\vec{v}$. Vectorul din membrul al doilea al egalității precedente are lungimea $|\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n|$, lungime care, pentru n impar, este evident mai mare sau egală cu 1.

88. Se observă că luînd în considerație numai mulțimi de puncte situate în același plan, proprietățile cerute sînt îndeplinite, de exemplu, de mulțimea vîrfurilor unui pentagon sau hexagon regulat.

Se folosește ultima mulțime pentru construcția în spațiu a exemplului cerut. Se ia mulțimea vîrfurilor a două hexagoane regulate, concentrice, situate însă în plane diferite. Se va arăta că această mulțime are proprietățile cerute. Dacă punctele A și B sînt vîrfuri ale aceluiași hexagon, atunci punctele C și D, cum s-a mai observat, se găsesc printre celelalte vîrfuri ale aceluiași hexagon. În continuare se consideră cazul cînd punctele A și B aparțin la hexagoane diferite. Dacă se folosește faptul că un hexagon regulat admite centru de simetrie și se iau drept puncte C și D simetricele punctelor A și B față de acest centru, se constată cu ușurință că dreapta CD este paralelă cu dreapta AB. Existența unei mulțimi finite de puncte cu proprietățile cerute de enunț este astfel demonstrată.

89. Se presupune că ecuația din enunț admite rădăcina $x_0 > 0$. Pentru această valoare

$$x_0^4 - |a|x_0^3 - |b|x_0^2 - |a|x_0 + 1 \leqslant x_0^4 + ax_0^3 + bx_0^2 + ax_0 + 1 = 0$$

sau

$$|a|x_0^3 + |b|x_0^2 + |a|x_0 \geqslant x_0^4 + 1.$$

Se verifică ușor inegalitățile

$$x_0^4 + 1 \geqslant 2x_0^2 \text{ și } x_0^4 + 1 \geqslant x_0^3 + x_0,$$

cu ajutorul cărora se obţine

$$x_0^4+1 \leqslant |a|x_0^3+|b|x_0^2+|a|x_0 \leqslant |a|(x_0^4+1)+|b|\frac{x_0^4+1}{2}=$$

$$=\left(|a|+\frac{|b|}{2}\right)(x_0^4+1),$$

ceea ce arată că

$$|a|+\frac{|b|}{2} \geqslant 1 \text{ sau, altfel scris, } |b| \geqslant 2-2|a|.$$

Rezultă

$$a^2+b^2 \geqslant |a|^2+(2-2|a|)^2=5|a|^2-8|a|+4=$$

$$=5\left(|a|-\frac{4}{5}\right)^2+\frac{4}{5} \geqslant \frac{4}{5}.$$

Dacă ecuaţia iniţială are rădăcina negativă x_0, se observă uşor că $-x_0$ este rădăcină pozitivă pentru ecuaţia $x^4-ax^3+bx^2-ax+1=0$. Se obţine, printr-o demonstraţie ca mai sus, că şi în acest caz $a^2+b^2 \geqslant \frac{4}{5}$. Cazul $x_0=0$ nu este posibil.

Astfel, în toate cazurile expresia a^2+b^2 nu este mai mică decît $\frac{4}{5}$. Se verifică uşor că valoarea $\frac{4}{5}$ se obţine pentru $a=-\frac{4}{5}$ şi $b=-\frac{2}{5}$.

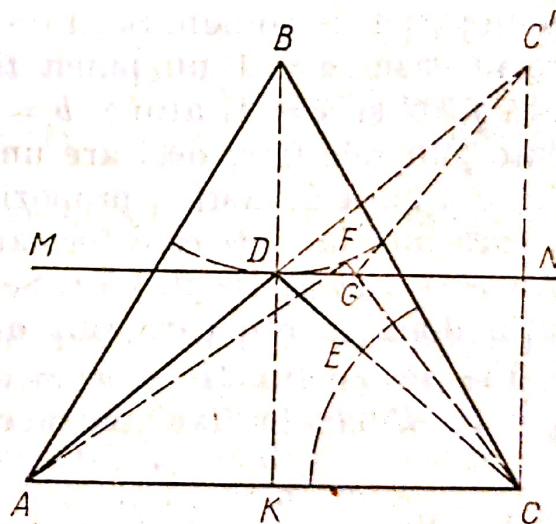


Fig. 56

90. Se consideră că soldatul pleacă din vîrful A al triunghiului. Pentru a verifica, între altele, punctele B şi C, el se va afla la un moment dat pe arcul de cerc de rază $\frac{h}{2}$ (h fiind înălţimea triunghiului) cu centrul în B, respectiv pe arcul de cerc de aceeaşi rază cu centrul în C (fig. 56). Se va găsi cel mai scurt dintre aceste drumuri. Se presupune că soldatul ajunge mai întîi pe arcul de cerc cu centrul în B, iar apoi pe arcul de cerc cu centrul în C. Dacă la acest drum se adaugă

drumul pînă la punctul C, problema se reduce la găsirea celui mai scurt drum de la A la C cu condiția ca acesta să aibă un punct comun cu primul arc de cerc. Se va arăta că acest drum cel mai scurt va fi linia poligonală ADC, punctul D fiind mijlocul înălțimii din vîrful B, procedînd în modul următor. Prin punctul D se duce dreapta MN paralelă cu AC și se notează cu C' simetricul punctului C față de această dreaptă. În acest fel un drum oarecare de la A la C (AFC pe figură) poate fi înlocuit cu drumul de aceeași lungime de la A la C' ($AFGC'$ pe figură). Drumul care urmează dreapta ADC' va fi, evident, cel mai scurt. Fie E punctul de intersecție al segmentului DC cu al doilea arc. Lăsînd la o parte drumul de-a lungul razei EC, se găsește că ADE este cel mai scurt drum pe care se verifică punctele B și C.

Rămîne de demonstrat faptul că în acest mod sînt verificate și toate celelalte puncte ale triunghiului, adică toate aceste puncte sînt situate față de drumul ADE la o distanță care nu depășește $\frac{h}{2}$. Aceasta se poate face descompunînd în mod convenabil triunghiul în porțiuni. Demonstrația este propusă cititorului.

Așadar, drumul ADE este cel căutat.

91. Punctul x_f care este dat la punctul c) se numește punct fix al funcției f. Trebuie demonstrat că toate funcțiile din mulțimea G au un punct fix comun. Se arată ușor că funcția liniară $f(x) = ax + b$ are în cazul $a = 1$ un punct fix numai dacă $b = 0$. Înseamnă că dacă $f \in G$ și $a = 1$, atunci $b = 0$. Funcția liniară $f(x) = x$ are însă toate punctele fixe, deci are un punct fix comun cu fiecare funcție din mulțimea G. Astfel, propoziția din enunț este evidentă în cazul în care mulțimea G este formată numai din una sau două funcții, între care una să fie $f(x) = x$. Se va considera deci că G conține cel puțin două funcții care sînt diferite de $f(x) = x$.

Fie aceste funcții $f_1(x) = a_1x + b_1$ și $f_2(x) = a_2x + b_2$ ($a_1 \neq 1$, $a_2 \neq 1$). Punctele fixe ale acestor funcții sînt respectiv $x_{f_1} = \frac{b_1}{1 - a_1}$ și $x_{f_2} = \frac{b_2}{1 - a_2}$. Conform cu condițiile a) și b) $g = f_1 \circ f_2 \in G$, $h = f_2 \circ f_1 \in G$ și $g \circ h^{-1} \in G$. Înlocuind în mod corespunzător, se obține $g(x) = a_1(a_2x + b_2) + b_1$, $h(x) = a_2(a_1x + b_1) + b_2$, $h^{-1}(x) = \frac{x - a_2b_1 - b_2}{a_2a_1}$ (în condițiile problemei $a_1 \neq 0$ și $a_2 \neq 0$), $g \circ h^{-1} = x + [(a_1b_2 + b_1) - (a_2b_1 + b_2)]$. S-a arătat însă că

din faptul că $g \circ h^{-1} \in G$ şi $g \circ h^{-1}$ are coeficientul lui x egal cu 1 rezultă că $(a_1b_2 + b_1)-(a_2b_1 + b_2) = 0$, ceea ce arată că

$$\frac{b_1}{1 - a_1} = \frac{b_2}{1 - a_2}, \text{ adică } x_{f_1} = x_{f_2}.$$

Întrucît aceasta este adevărat pentru orice pereche de funcţii din mulţimea G, înseamnă că s-a demonstrat că toate funcţiile $f \in G$ au un punct comun k astfel ca $f(k) = k$.

92. Sensul problemei constă în a elimina diferenţele pronunţate între mărimile termenilor vecini, mărind fiecare termen a_k. Este evident că numerele a_k nu determină unic numerele b_k.

Unele rezolvări se bazează pe găsirea unui algoritm de mărire succesivă a numerelor a_k astfle încît în final să se obţină numerele căutate b_k. Se vor expune în continuare două rezolvări ale acestei probleme.

R e z o l v a r e a I. Cea mai scurtă rezolvare se obţine observînd că numerele căutate b_k pot fi luate de forma

$$b_k = a_1q^{k-1} + a_2q^{k-2} + \ldots + a_{k-1}q + a_k + a_{k+1}q + \ldots + a_nq^{n-k}.$$

Se verifică îndeplinirea condiţiilor a), b), c).

Condiţia a) este îndeplinită în mod evident.

Dacă $1 \leqslant k \leqslant n - 1$, rezultă $qb_k - b_{k+1} = a_{k+1}(q^2 - 1) + \ldots$ $\ldots + a_nq^{n-k+1}\cdot(q^2 - 1) < 0$ şi, în mod analog, $qb_{k+1} - b_k < 0$, deci condiţia b) este îndeplinită. În fine, $b_1 + b_2 + \ldots + b_n = a_1 + a_2q +$ $+ a_3q^2 + \ldots + a_nq^{n-1} + a_1q + a_2 + a_3q + \ldots + a_nq^{n-2} + a_1q^{n-1} + a_2q^{n-2} +$ $+ a_3q^{n-3} + \ldots + a_n < (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)(1 + 2q + 2q^2 + \ldots + 2q^{n-1}) \leqslant$ $\leqslant (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\dfrac{1 + q}{1 - q}$, ceea ce înseamnă că este îndeplinită şi condiţia c).

R e z o l v a r e a II. Această rezolvare, cu toate că este mai lungă decît prima, are un aspect mai natural. Se construiesc mai întîi numerele reale $c_1, c_2, \ldots, c_n$ pentru care sînt îndeplinite aceleaşi condiţii a), b), c), însă inegalităţile stricte din condiţiile a) şi b) sînt înlocuite cu inegalităţi nestricte şi anume:

a′) $a_k \leqslant c_k$, $k = 1, \ldots, n$;

b′) $q \leqslant \dfrac{c_{k+1}}{c_k} \leqslant \dfrac{1}{q}$, $k = 1, \ldots, n - 1$;

c′) $c_1 + c_2 + \ldots + c_n < \dfrac{1 + q}{1 - q}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$.

Pentru fiecare număr $a_i (1 \leqslant i \leqslant n)$ se consideră numerele $\varphi_i(k) = a_i q^{|i-k|} (1 \leqslant k \leqslant n)$, care pot fi interpretate ca valorile ordonatelor unei funcții $\varphi_i(x)$ pentru abscisele întregi $x = k$, al cărei grafic pe segmentele de forma $[k, k+1] (k = 1, \ldots, n-1)$ este dat de segmente de dreaptă.

Graficul funcției $\varphi_i(x)$ va fi astfel format de o linie poligonală, funcția $\varphi_i(x)$ fiind crescătoare pe intervalul $[1, i)$ și descrescătoare pe intervalul $(i, n]$. În punctul $x = i$ funcția admite un maxim $\varphi_i(i) = a_i$.

Se observă următoarea proprietate a funcțiilor $\varphi_i(x)$: dacă pe intervalul $(l, l+1)$, l fiind întreg, două funcții $\varphi_{i_1}(x)$ și $\varphi_{i_2}(x)$ au aceeași monotonie (amîndouă sînt crescătoare sau amîndouă sînt descrescătoare), pe acest interval graficele celor două funcții sau nu au nici un punct comun, sau coincid.

Considerînd, de exemplu, că ambele funcții sînt crescătoare, din definiția lui $\varphi_i(x)$ rezultă că $\varphi_{i_1}(l) = q\varphi_{i_1}(l+1)$, iar $\varphi_{i_2}(l) = q\varphi_{i_2}(l+1)$. Este clar, în consecință, că relația de ordine prin care sînt legate numerele $\varphi_{i_1}(l+1)$ și $\varphi_{i_2}(l+1)$ va fi aceeași care va lega și numerele $\varphi_{i_1}(l)$ și $\varphi_{i_2}(l)$ și deci și valorile funcțiilor $\varphi_{i_1}(x)$ și $\varphi_{i_2}(x)$ pentru orice $x \in [l, l+1]$.

Cazul cînd ambele funcții sînt descrescătoare pe intervalul $(l, l+1)$ se studiază analog, rezultînd că proprietatea enunțată este îndeplinită întotdeauna.

Se notează, în continuare, $c_k = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \varphi_i(k)$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ și se verifică îndeplinirea de către c_k a condițiilor a′), b′), c′).

Condiția a′) este evident îndeplinită, deoarece $c_k = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \varphi_i(k) \geqslant$ $\geqslant \varphi_k(k) = a_k$.

Pentru a verifica îndeplinirea condiției b′) se consideră c_l și c_{l+1}. Din definiția lui c_k rezultă că $c_l = \varphi_{i_1}(l)$ și $c_{l+1} = \varphi_{i_2}(l+1)$. Dacă $i_1 = i_2$, se obține

$$\frac{c_{l+1}}{c_l} = \frac{1}{q} \quad \text{sau} \quad \frac{c_{l+1}}{c_l} = q,$$

după cum funcția $\varphi_i(x)$ este crescătoare sau descrescătoare pe intervalul $(l, l+1)$, deci se îndeplinește și condiția b′).

În cazul $i_1 \neq i_2$, graficele funcțiilor $\varphi_{i_1}(x)$ și $\varphi_{i_2}(x)$ se intersectează pe intervalul $(l, l+1)$ și conform cu proprietatea mai sus citată una dintre ele este crescătoare iar cealaltă este descrescătoare pe acest interval. Întrucît $\varphi_{i_1}(l) = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \varphi_i(l) > \varphi_{i_2}(l)$ și $\varphi_{i_2}(l+1) =$

$= \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \varphi_i(l+1) > \varphi_{i_1}(l+1)$, înseamnă că funcția $\varphi_{i_1}(x)$ descrește, iar funcția $\varphi_{i_2}(x)$ crește pe intervalul $[l, l+1]$. Astfel

$$q = \frac{\varphi_{i_1}(l+1)}{\varphi_{i_1}(l)} < \frac{\varphi_{i_2}(l+1)}{\varphi_{i_1}(l)} = \frac{c_{l+1}}{c_l} < \frac{\varphi_{i_2}(l+1)}{\varphi_{i_2}(l)} = \frac{1}{q}.$$

Condiția b′) este satisfăcută, deci, și în acest caz.

Pentru verificarea condiției c′) se observă că $c_k < \varphi_1(k) + \varphi_2(k) + \ldots + \ldots + \varphi_n(k) = a_1 q^{k-1} + a_2 q^{k-2} + \ldots + a_{k-1} q + a_k + a_{k+1} q + \ldots \ldots + a_n q^{n-k}$, și de aceea suma $c_1 + c_2 + \ldots + c_n$ se va evalua ca și în primul mod de rezolvare.

Condițiile a′), b′), c′) sînt astfel verificate.

În continuare se trece de la numerele $c_1, c_2, \ldots, c_n$ la numerele $b_1, b_2, \ldots, b_n$, care se cereau. Se poate scrie pe baza lui c′):

$$\frac{1+q}{1-q}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) - (c_1 + c_2 + \ldots + c_n) = d > 0.$$

Se notează $b_k = c_k + \frac{d}{2n}$, $1 \leqslant k \leqslant n$. Condiția a) este evident satisfăcută. Condiția c) este satisfăcută la rîndul său, deoarece $b_1 + b_2 + \ldots + b_n = c_1 + c_2 + \ldots + c_n + \frac{d}{2} < \frac{1+q}{1-q}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$. Îndeplinirea condiției b), adică valabilitatea inegalităților

$$q < \frac{c_{l+1} + \frac{d}{2n}}{c_l + \frac{d}{2n}} < \frac{1}{q}$$

poate fi dedusă din inegalitățile $q \leqslant \frac{c_{l+1}}{c_l} \leqslant \frac{1}{q}$ $(0 < q < 1)$, studiind separat cazurile $c_{l+1} > c_l$ și $c_{l+1} < c_l$. Propunem cititorului această demonstrație.

93. După fiecare joc toți jucătorii primesc $p + q + r$ bile. Din enunț rezultă că $N(p + q + r) = 39$. Deoarece p, q și r sînt numere întregi pozitive diferite între ele, înseamnă că $p + q + r \geqslant 6$. Întrucît $N \geqslant 2$, se deduce, descompunînd numărul 39 în factori, că $N = 3$, iar $p + q + r = 13$. Jucătorul B care a luat la ultimul joc r bile, nu putea lua la nici unul din primele jocuri r sau q bile, deoarece ar fi luat în total cel puțin 13 bile, ceea ce contrazice enunțul pro-

blemei. Din această cauză atît la primul cît și la al doilea joc el a primit cîte p bile. Jucătorul C nu putea lua r bile la primul joc, deoarece primind la al doilea joc cel puțin q bile și la al treilea cel puțin p bile, ar fi totalizat nu mai puțin de 13 bile. contrazicîndu-se enunțul conform căruia el a primit doar 9 bile în total. Astfel, jucătorul C nu putea primi decît q bile la primul joc. Raționamentele ulterioare, prin care se găsesc ușor valorile lui p, q și r și se reface în întregime desfășurarea jocului, sînt lăsate cititorului. Se demonstrează astfel că se poate efectiv realiza un joc satisfăcînd condițiile din enunț și în acest caz în primul joc vor reveni q bile jucătorului C.

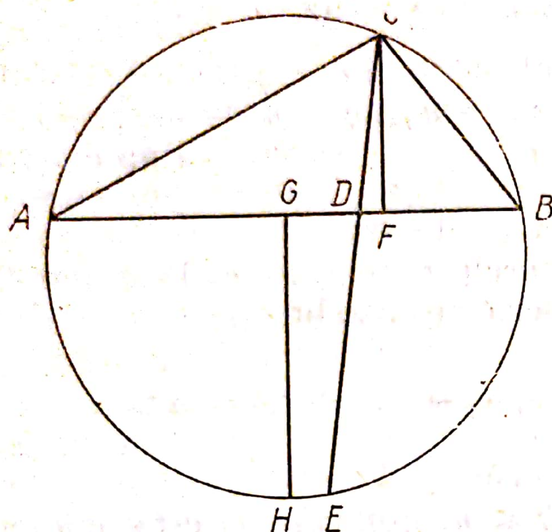


Fig. 57

94. Pe latura AB a triunghiului ABC se ia punctul arbitrar D și se prelungește segmentul CD pînă cînd intersectează în punctul E cercul circumscris triunghiului ABC (fig. 57). Se obține $CD \cdot DE = AD \cdot DB$, rezultînd astfel că lungimea lui CD este medie geometrică a lungimilor lui AD și DB dacă și numai dacă $CD = DE$.

Înseamnă că determinarea punctului D care are proprietățile cerute este echivalentă cu determinarea unui punct E pe cercul circumscris triunghiului ABC, astfel încît punctul de intersecție al segmentelor AB și CE să fie mijlocul segmentului CE. Găsirea unui astfel de punct E pe cerc este posibilă dacă și numai dacă $CF \leqslant HG$, unde CF este înălțimea triunghiului ABC, iar HG înălțimea segmentului de cerc AHB, care se sprijină pe AB și nu conține punctul C. Se calculează ușor că

$$CF = 2r \sin A \sin B \text{ și } HG = r - r\cos C = 2r \sin^2 \frac{C}{2}.$$

Se observă că inegalitatea din enunțul problemei este echivalentă cu $CF \leqslant HG$, care s-a demonstrat că este condiția necesară și suficientă pentru determinarea punctului D cu proprietățile cerute.

95. Se consideră o generalizare a sumelor care intervin în enunțul problemei. Se introduc, pentru $m \geqslant 1$, notațiile:

$$A_m = \sum_{\substack{k \\ (0<2k+1\leqslant m)}} C_m^{2k+1} 2^{3k} \text{ și } B_m = \sum_{\substack{k \\ (0\leqslant 2k\leqslant m)}} C_m^{2k} 2^{3k}, \quad (C_m^0 = 1).$$

Pentru m impar şi mai mare decît unu, A_m constituie suma din enunţ. Folosind egalitatea cunoscută $C_m^{l+1} + C_m^l = C_{m+1}^{l+1} (l+1 \leqslant m)$, se verifică uşor că pentru $m \geqslant 1$

$$A_m + B_m = A_{m+1}, \; 8A_m + B_m = B_{m+1}. \qquad (1)$$

Se va arăta în continuare prin inducţie completă că A_m (m impar) şi B_m (m par) nu se divid la 5. Pentru toate valorile $m \leqslant 3$ aceasta este adevărat, deoarece $A_1 = 1$, $A_3 = 11$, $B_2 = 9$. Se presupune că aceasta este adevărat pentru toţi $m \leqslant i$, $i > 3$, şi se va demonstra că atunci afirmaţia este adevărată şi pentru toţi $m \leqslant i + 1$.

Aplicînd, de fapt, de cîteva ori egalităţile (1), se găseşte

$$A_{m+3} = A_{m+2} + B_{m+2} = 9A_{m+1} + 2B_{m+1} = 5(5A_m + 2B_m) + B_m,$$
$$B_{m+3} = 5(17A_m + 5B_m) + 3A_m.$$

Rezultă, din aceste relaţii, particularizînd, că sumele din enunţ nu se divid la 5, oricare ar fi numărul natural n.

96. Din punctul b) al enunţului problemei rezultă că $a_i \geqslant i$ şi de aceea

$$32 = a_1 + a_2 + \ldots + a_p \geqslant \frac{p(p+1)}{2},$$

ceea ce înseamnă că $p \leqslant 7$.

Se scriu toate descompunerile posibile ale numărului 32 în şapte termeni naturali distincţi:

1) $1+2+3+4+5+6+11$;

2) $1+2+3+4+5+7+10$;

3) $1+2+3+4+5+8+9$;

4) $1+2+3+4+6+7+9$;

5) $1+2+3+5+6+7+8$.

Primul caz nu se poate realiza, deoarece pe tabla de şah de dimensiuni 8×8 nu există un dreptunghi format din 22 pătrăţele. Cazurile celelalte pot fi realizate, fapt care se arată construind exemple.

97. Se observă uşor că suma S este omogenă faţă de numerele a, b, c, d, care intervin în termenii săi, adică nu îşi schimbă valoarea cînd aceste numere se înmulţesc toate cu acelaşi număr nenul. Din această cauză mulţimea valorilor sumei S nu va fi modificată dacă se consideră că numerele a, b, c, d satisfac relaţia $a + b + c + d = 1$. Se notează $a + c = x > 0$, $b + d = y > 0$; condiţia impusă se scrie astfel $x + y = 1$.

13 – c. 1664

Fie suma

$$S_1 = \frac{a}{a+b+d} + \frac{c}{b+c+d} = \frac{a}{1-c} + \frac{c}{1-a} = \frac{2ac + x - x^2}{ac + 1 - x}.$$

Dacă x este păstrat constant, iar (a, c) parcurge toate perechile de numere reale pozitive pentru care $a + c = x$, se arată ușor că produsul ac parcurge toate numerele reale pozitive care nu depășesc numărul $\left(\frac{a+c}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{4}$, adică $ac \in \left(0, \frac{x^2}{4}\right]$, interval pe care expresia

$$S_1 = \frac{2ac + x - x^2}{ac + 1 - x} = 2 + \frac{3x - 2 - x^2}{ac + 1 - x},$$

considerată ca funcție de ac, variază monoton luînd toate valorile din intervalul $\left(x, \frac{2x}{2-x}\right]$.

Se demonstrează analog că, pentru y păstrat constant, expresia

$$S_2 = \frac{b}{a+b+c} + \frac{d}{a+c+d}$$

ia toate valorile din intervalul $\left(y, \frac{2y}{2-y}\right]$.

S ia atunci toate valorile din intervalul

$$\left(x + y, \frac{2x}{2-x} + \frac{2y}{2-y}\right] = \left(1, \frac{4 - 4xy}{2 + xy}\right].$$

Dacă x și y iau valori pozitive arbitrare pentru care $x + y = 1$, atunci se arată, prin raționamente asemănătoare, că expresia $\frac{4 - 4xy}{2 + xy}$ ia toate valorile din intervalul $\left[\frac{4}{3}, 2\right)$. Se deduce astfel că S ia toate valorile din intervalul $(1, 2)$.

Cititorii care au noțiuni de analiză matematică pot folosi pentru rezolvarea acestei probleme proprietățile funcțiilor continue. Este evident că

$$S < \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} + \frac{c}{c+d} + \frac{d}{c+d} = 2$$

și

$$S > \frac{a}{a+b+c+d} + \frac{b}{a+b+c+d} + \frac{c}{a+b+c+d} + \frac{d}{a+b+c+d} = 1.$$

Se arată în continuare că S poate lua valori oricît de apropiate de 1 și 2, iar apoi, folosind sub o formă sau alta teorema despre valorile intermediare ale unei funcții continue, se stabilește că S ia toate valorile din intervalul (1, 2).

98. Se presupune că fiecare dintre polinoamele $P(x) - 1$ și $P(x) + 1$ are cel puțin trei rădăcini întregi distincte, nici una dintre ele, evident, nefiind comună celor două polinoame. Se notează cu a cel mai mic din aceste șase numere întregi și se consideră, fără a restrînge generalitatea, că a este rădăcină a polinomului $P(x) + 1$. Este evident că polinomul $P(x) + 1$ se poate pune sub forma $P(x)+1=(x-a)\,Q(x)$, unde $Q(x)$ este de asemenea un polinom cu coeficienți întregi. Fie p, q, r cele trei rădăcini întregi diferite ale polinomului $P(x) - 1$, care sînt toate mai mari decît a, pe baza modului în care a fost ales acesta. Dar $P(x) - 1 = (x - a)Q(x) - 2$, deci $2 = (p - a)Q(p) = (q - a)\,Q(q) = (r - a)\,Q(r)$, iar $p - a$, $q - a$ și $r - a$ sînt numere întregi pozitive diferite între ele. Rezultă că cel puțin unul din ele este mai mare decît 2, ceea ce, evident, contrazice faptul că acesta este divizor al numărului 2.

Astfel, presupunerea făcută este falsă și rezultă că cel puțin una din ecuațiile $P(x) = 1$ sau $P(x) = -1$ are cel mult două rădăcini întregi. Ținînd seama și de faptul că numărul rădăcinilor fiecăreia din aceste două ecuații nu poate depăși $\deg(P)$, rezultă inegalitatea cerută.

99. Desfăcînd parantezele în inegalitatea care se cere demonstrată, se constată că aceasta este echivalentă cu inegalitatea

$$\sum_{i=1}^{n} x_i z_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Această inegalitate se demonstrează prin inducție completă. Pentru $n = 1$ aceasta este evidentă și se presupune că este adevărată pentru $n = k$. Se va arăta că este adevărată și pentru $n = k + 1$. Dacă $z_1 = y_1$, conform cu presupunerea făcută $\sum_{i=2}^{k+1} x_i z_i \leqslant \sum_{i=2}^{k+1} x_i y_i$ și, adăugînd la ambii membri $x_1 y_1$, se obține inegalitatea căutată.

Se consideră în continuare $z_1 = y_m$, $m \neq 1$ și $y_1 = z_l$, $l \neq 1$. Întrucît $x_1 \geqslant x_l$ și $y_1 \geqslant y_m$, rezultă $(x_1 - x_l)(y_1 - y_m) \geqslant 0$, deci $x_1 y_1 + x_l y_m \geqslant x_1 y_m + x_l y_1$. De aceea, suma $\sum_{i=1}^{k+1} x_i z_i$ nu se micșorează dacă termenii $x_1 z_1 = x_1 y_m$ și $x_l z_l = x_l y_1$ sînt înlocuiți prin termenii

x_1y_1 şi $x_l\, y_m$. Suma obţinută astfel se poate scrie sub forma $x_1y_1 + \sum_{i=2}^{k+1} x_i z_i'$, notînd pentru $i \geqslant 2$,

$$z_i' = \begin{cases} z_i, & \text{dacă } i \neq l, \\ y_m, & \text{dacă } i = l, \end{cases}$$

notaţia pentru care este evident că $z_2', \ldots, z_{k+1}'$ este o permutare a numerelor $y_2, \ldots, y_{k+1}$. Ţinînd seama de presupunerea de la inducţie $\sum_{i=2}^{k+1} x_i z_i' \leqslant \sum_{i=2}^{k+1} x_i y_i$, înseamnă că $\sum_{i=1}^{k+1} x_i z_i \leqslant x_1y_1 + \sum_{i=2}^{k+1} x_i z_i' \leqslant \sum_{i=1}^{k+1} x_i y_i$, ceea ce se cerea demonstrat.

100. Fie A_r un subşir al lui $\{a_k\}$ $(k > 1)$ format din numerele care prin împărţirea la a_1 dau restul r. Întrucît, dacă r variază de la 0 la $a_1 - 1$, fiecare număr a_k intră într-unul din subşirurile A_r, înseamnă că cel puţin unul din aceste subşiruri va fi infinit. Se va arăta că termenii acestui subşir infinit $a_{k_1}, a_{k_2}, \ldots, a_{k_i}, \ldots$ începînd de la termenul a_{k_2} vor constitui numerele căutate a_m. Aceştia se pot reprezenta, de fapt, sub forma $a_{k_i} = p_i a_1 + r$. De aceea, pentru $i \geqslant 2$, $a_{k_i} - a_{k_1} = (p_i - p_1)a_1$, deci $a_{k_i} = x a_{k_1} + y a_1$, caz în care $x = 1$, $y = p_i - p_1 > 0$ şi $k_1 \neq 1$ deoarece $k_1 > 1$.

101. Se notează cu α, β, respectiv γ mărimile unghiurile A, B, C ale triunghiului ABC. Se construieşte punctul B' în interiorul unghiului ARB ($\sphericalangle ARB = 150°$), astfel ca

$$B'R = BR \tag{1}$$

şi $\sphericalangle BRB' = 90°$. Astfel $\sphericalangle B'RA = 60°$. Se obţine $B'R = AR$, deci $\triangle AB'R$ este echilateral.

Se uneşte punctul B' cu punctul Q şi se consideră $\triangle AB'Q$. Un calcul simplu arată că $\sphericalangle B'AQ = \alpha$, iar din teorema sinusurilor rezultă că $AQ = \dfrac{AC \sin 30°}{\sin 105°} = \dfrac{AC}{2\cos 15°}$. Din $\triangle ARB$ se constată că $AR = \dfrac{AB}{2\cos 15°}$. Deoarece $AR = AB'$, rezultă că $\dfrac{AQ}{AB'} = \dfrac{AC}{AB}$, adică $\triangle AB'Q \sim \triangle ABC$ şi deci $\sphericalangle AB'Q = \beta$, găsindu-se

$$\sphericalangle RBP = \sphericalangle RB'Q. \tag{2}$$

Din asemănarea triunghiurilor BCP şi ACQ rezultă că $\frac{BC}{BP} = \frac{AC}{AQ}$, iar din asemănarea triunghiurilor $AB'Q$ şi ABC că $\frac{AC}{AQ} = \frac{BC}{B'Q}$, ceea ce arată că

$$BP = B'Q. \tag{3}$$

Din relaţiile (1), (2), (3) rezultă că prin rotirea liniei poligonale RBP cu un unghi de 90° în jurul punctului R în sensul acelor de ceasornic, aceasta se transformă în linia poligonală $RB'Q$, punctul P transformîndu-se în punctul Q, ceea ce înseamnă că $PR = QR$ şi deci $\angle PRQ = 90°$.

102. Se observă că deoarece $4444^{4444} < 10\,000^{4444}$, numărul cifrelor lui 4444^{4444} nu depăşeşte în scrierea zecimală pe $4444 \cdot 4 + 1 < 20000$. Astfel rezultă că $A < 9 \cdot 20000 = 180\,000$, adică $B < 9 \cdot 5 = 45$. Din această cauză, dacă se notează suma cifrelor numărului B cu C, se găseşte

$$C < 4 + 9 = 13. \tag{1}$$

Se observă că suma cifrelor unui număr dă acelaşi rest ca şi numărul prin împărţirea la 9. Rezultă astfel că

$$4444^{4444} \equiv C (\text{mod } 9). \tag{2}$$

Pe de altă parte, $4444 \equiv 7 (\text{mod } 9)$ şi de aceea $4444^{4444} \equiv 7^{4444} (\text{mod } 9)$, de unde rezultă că $4444^{4444} \equiv (-2)^{3 \cdot 1481} \cdot 7 \equiv (-8)^{1481} \cdot 7 \equiv 7 (\text{mod } 9)$. Avînd în vedere relaţiile (1) şi (2), se obţine $C = 7$.

103. Se arată uşor că există o infinitate de perechi de triunghiuri dreptunghice distincte avînd lungimea ipotenuzei 2 şi lungimile catetelor exprimate prin numere raţionale (cum sînt, de exemplu, triunghiurile avînd lungimile catetelor $\frac{4n}{n^2+1}$ şi $\frac{2n^2-2}{n^2+1}$, n fiind un număr natural). Se fixează diametrul AB al cercului dat de rază 1 şi se construiesc pe acest diametru 1975 astfel de triunghiuri distincte ABC_i ($i = 1, 2, \ldots, 1975$), punctele C_i fiind luate pe acelaşi semicerc. Se va arăta că punctele C_i sînt punctele căutate. Fie două dintre acestea C_1 şi C_2, iar D_1 şi D_2 sînt proiecţiile acestora pe diametrul AB. Se notează $\angle C_1BA = \alpha$, $\angle C_2AB = \beta$ şi se obţine $C_1C_2 = \frac{D_1D_2}{\cos(\alpha - \beta)}$. Lungimea lui D_1D_2 se exprimă printr-un număr

raţional, deoarece se arată uşor că mărimile lui AD_1 şi AD_2 sînt raţionale. În afară de aceasta, mărimile $\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\cos\alpha$, $\cos\beta$ sînt raţionale şi deci $\cos(\alpha-\beta)$ va fi tot un număr raţional. Astfel lungimea lui C_1C_2 se exprimă printr-un număr raţional.

104. Rezolvarea I. Folosind proprietatea b), se notează $a=b=c=y$. Se obţine astfel $P(2y,\ y)=0$ pentru orice y. Se deduce din aceasta că polinomul $P(x,\ y)$ se divide la $x-2y$. Dacă se notează $a=b=x$, $c=-2x$ şi se ţine seama de proprietăţile a) şi b), se găseşte

$$2^nP(x,\ -x)+2P(-x,\ x)=0. \qquad (1)$$

Notînd $a=x$, $b=-x$, $c=0$, se obţine $P(0,\ 0)+P(-x,\ x)+P(x,\ -x)=0$. Evident, însă, că $P(0,\ 0)=0$ şi deci $P(x,\ -x)=-P(-x,\ x)$. Folosind a), rezultă că $(2^n-2)\cdot P(x,\ -x)=0$, oricare ar fi x. De aceea, $P(x,\ -x)=0$ pentru $n>1$. Se deduce că polinomul $P(x,\ y)$ se divide la $x+y$.

Fie $P_1(x,\ y)=\dfrac{P(x,\ y)}{x+y}$. Se arată uşor că polinomul $P_1(x,\ y)$ de grad $n-1$ posedă proprietăţile a), b), c). Proprietatea b) se verifică prin calcul direct în cazul $a+b+c\neq 0$, iar în cazul $a+b+c=0$ rezultă din continuitatea polinomului.

Astfel, $P_1(x,\ y)$ se divide prin $x-2y$ şi prin $x+y$. Din aproape în aproape se obţine că $P(x,\ y)=(x-2y)(x+y)^{n-1}$.

Rezolvarea II. Fie n gradul lui P. Se poate scrie

$$P(x,\ y)=(x+y)^nQ\left(\frac{y}{x+y}\right),$$

unde Q este un polinom al cărui grad nu depăşeşte pe n, care satisface condiţia $Q(\alpha)+Q(\beta)+Q(1-\alpha-\beta)=0$ sau, pentru a uşura raţionamentele următoare, condiţia se poate transcrie $Q(\alpha)+Q(1-\beta)+Q(\beta-\alpha)=0$. Această identitate în α, β arată că gradul lui Q nu poate fi mai mare ca 1, deoarece termenii de forma $c\alpha^m\beta^p$ din $Q(\beta-\alpha)$ nu pot fi reduşi de nici un termen din $Q(\alpha)+Q(1-\beta)$ în cazul cînd $m>0$, $p>0$. Rezultă $Q(z)=cz+d$. Se obţine

$$c\alpha+d+c\beta+d+c(1-\alpha-\beta)+d=0,\ \text{adică}\ c+3d=0,$$

iar $1=P(1,\ 0)=1^n\,Q(0)=d$, deci $d=1$, $c=-3$. Prin urmare

$$Q(z)=-3z+1,\ P(x,\ y)=(x+y)^n\left(-3\frac{y}{x+y}+1\right)$$

sau, în final,

$$P(x, y) = (x + y)^{n-1} (x - 2y).$$

105. Dacă $ABCD$ este patrulaterul din enunţ, se notează $AB = a$, $BD = b$ şi $CD = c$. Întrucît aria S a patrulaterului este suma ariilor triunghiurilor ABD şi BCD,

$$\frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}bc \geqslant 32. \tag{1}$$

Pe de altă parte, $a + b + c = 16$, de aceea $\frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}bc = \frac{1}{2}b(16 - b) = 32 - \frac{1}{2}(8 - b)^2 \leqslant 32$ adică

$$\frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}bc \leqslant 32. \tag{2}$$

Din relaţiile (1) şi (2) rezultă $\frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}bc = \frac{1}{2}$, deci $\sphericalangle ABD = \sphericalangle BDC = 90°$. Deoarece $32 - \frac{1}{2}(8 - b)^2 = 32$, înseamnă că $b=8$. În continuare se observă uşor că lungimea diagonalei AD nu depinde de raportul lungimilor laturilor AB şi CD. Într-adevăr, dacă se poartă în continuarea segmentului DC segmentul $CE = AB$, se formează paralelogramul $ABEC$ şi deci $BE = AC$ şi $DE = a + c = 16 - b = 8$. Fiindcă $BD = 8$, înseamnă că $BE = 8\sqrt{2}$ şi deci lungimea diagonalei AC nu poate avea decît valoarea $8\sqrt{2}$.

106. Ecuaţia considerată are gradul 2^n. Se pot obţine rădăcinile care nu aparţin intervalului $[-2, 2]$ făcînd substituţia $x = 2 \cos t$. În acest caz $P_1(x) = 2 \cos 2t$ şi se obţine prin inducţie că $P_n(x) = 2 \cos 2^n t$. Ecuaţia se va scrie

$$\cos 2^n t = \cos t,$$

soluţiile ei fiind date de $2^n t \pm t = 2k\pi$ $(k \in Z)$. Soluţiile care se află intervalul $[0, \pi]$ sînt:

$$0, \frac{2\pi}{2^n + 1}, \frac{4\pi}{2^n + 1}, \ldots, \frac{2^n\pi}{2^n + 1} \text{ şi } \frac{2\pi}{2^n - 1}, \frac{4\pi}{2^n - 1}, \ldots, \frac{(2^n - 2)\pi}{2^n - 1}$$

În continuare se demonstrează că toate aceste valori sînt distincte. Într-adevăr, $\frac{2k_1\pi}{2^n+1} = \frac{2k_2\pi}{2^n-1}$ atrage după sine $k_1 2^n - k_1 = k_2 2^n + k_2$, deci $k_1 + k_2 = (k_1 - k_2)2^n$. Deoarece $k_1 \leqslant 2^{n-1}$, $k_2 \leqslant 2^{n-1} - 1$, rezultă $k_1 + k_2 < 2^n$, adică $k_1 = k_2$ şi $k_1 + k_2 = 0$. Se deduce $k_1 = k_2 = 0$.

Prin această metodă s-au obţinut 2^n rădăcini distincte. Ţinînd seama de gradul polinomului, este evident că acestea vor fi toate rădăcinile sale.

107. Condiţia ca să se poată umple cutia cu cuburi de volum 1 este echivalentă cu exprimarea lungimilor muchiilor sale prin numere întregi. Se vor nota aceste lungimi prin a, b, c şi se va considera că $a \leqslant b \leqslant c$.

Deoarece pe un segment de lungime n nu se pot purta în continuare mai mult de $\left[\frac{n}{\sqrt[3]{2}}\right]$ segmente de lungime $\sqrt[3]{2}$, volumul maxim care este ocupat în cutie de cuburile de volum 2 va fi

$$\left[\frac{a}{\sqrt[3]{2}}\right]\left[\frac{b}{\sqrt[3]{2}}\right]\left[\frac{c}{\sqrt[3]{2}}\right].$$

Enunţul cere ca acest volum să constituie 40% din volumul cutiei, deci

$$2\left[\frac{a}{\sqrt[3]{2}}\right]\left[\frac{b}{\sqrt[3]{2}}\right]\left[\frac{c}{\sqrt[3]{2}}\right] = 0{,}4\ abc.$$

Relaţia obţinută se poate scrie sub forma

$$\frac{a}{\left[\frac{a}{\sqrt[3]{2}}\right]} \cdot \frac{b}{\left[\frac{b}{\sqrt[3]{2}}\right]} \cdot \frac{c}{\left[\frac{c}{\sqrt[3]{2}}\right]} = 5.$$

Variaţia mărimilor $\left[\frac{n}{\sqrt[3]{2}}\right]$ şi $\frac{n}{\left[\frac{n}{\sqrt[3]{2}}\right]}$ este dată de tabelul

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\left[\frac{n}{\sqrt[3]{2}}\right]$	0	1	2	3	3	4	5	6	7	7
$\frac{n}{\left[\frac{n}{\sqrt[3]{2}}\right]}$	—	2	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{9}{7}$	$\frac{10}{7}$

Se arată că, dacă $n \geqslant 7$, are loc inegalitatea

$$\frac{n}{\left[\frac{n}{\sqrt[3]{2}}\right]} < \frac{3}{2}. \qquad (1)$$

Pentru $n = 7$, inegalitatea este imediată. Din inegalitatea evidentă

$$\left[\frac{n}{\sqrt[3]{2}}\right] > \frac{n}{\sqrt[3]{2}} - 1$$

rezultă

$$\frac{n}{\left[\frac{n}{\sqrt[3]{2}}\right]} < \sqrt[3]{2}\left(1 + \frac{1}{\left[\frac{n}{\sqrt[3]{2}}\right]}\right).$$

Dacă $n \geqslant 8$, $\left[\frac{n}{\sqrt[3]{2}}\right] \geqslant 6$ și deci $\frac{n}{\left[\frac{n}{\sqrt[3]{2}}\right]} < 1,26\left(1 + \frac{1}{6}\right) = 1,47 < 1,5$, ceea ce demonstrează inegalitatea (1).

Din studiul tabelului și din inegalitatea (1) rezultă că $n > 1$ valoarea maximă a lui $\frac{n}{\left[\frac{n}{\sqrt[3]{2}}\right]}$ este 2 și se obține pentru $n=2$, pentru

următoarea valoare este $\frac{5}{3}$ şi se obţine pentru $n=5$, iar celelalte valori nu depăşesc $\frac{3}{2}$.

Revenind la determinarea numerelor a, b, c, este evident că $a \geqslant 2$.

Se va arăta că $a = 2$. Într-adevăr, dacă $a > 2$,

$$\left[\frac{a}{\sqrt[3]{2}}\right]\left[\frac{b}{\sqrt[3]{2}}\right]\left[\frac{c}{\sqrt[3]{2}}\right] < \left(\frac{5}{3}\right)^3 = \frac{125}{27} < 5.$$

Astfel, este necesar ca $a = 2$. In acest caz $\frac{b \quad c}{\left[\frac{b}{\sqrt[3]{2}}\right]\left[\frac{c}{\sqrt[3]{2}}\right]} = \frac{5}{2}$. Rămîn de studiat încă două cazuri: $b = 2$, $c = \frac{5}{4}$ şi $b = \frac{5}{3}$, $c = \frac{3}{2}$. $\left(\text{sau } b = \frac{3}{2}, c = \frac{5}{3}\right)$, deoarece dacă b şi c nu ar depăşi fiecare pe $\frac{3}{2}$, ar rezulta

$$\frac{b}{\left[\frac{b}{\sqrt[3]{2}}\right]} \cdot \frac{c}{\left[\frac{c}{\sqrt[3]{2}}\right]} \leqslant \frac{9}{4} < \frac{5}{2}.$$

Se va arăta că primul caz nu este posibil. Într-adevăr, dacă $\frac{c}{\left[\frac{c}{\sqrt[3]{2}}\right]} = \frac{5}{4}$, înseamnă că $4c = 5\left[\frac{c}{\sqrt[3]{2}}\right]$ şi deci $64c^2 = 125\left[\frac{c}{\sqrt[3]{2}}\right]^3 \leqslant$ $\leqslant 125\frac{c^3}{2} = 62{,}5\ c^2$, ceea ce nu este posibil. Cel de-al doilea caz se realizează cînd $b = 5$, $c = 6$ sau $b = 3$, $c = 5$. În consecinţă, cutia care satisface condiţiile din enunţ va trebui să aibă dimensiunile $2 \times 3 \times 5$ sau $2 \times 5 \times 6$.

108. Un factor oarecare m al numărului care se cere determinat poate fi înlocuit cu doi factori de forma 2 şi $m - 2$. Înlocuirea trebuie să ducă totdeauna la un număr mai mic, deci $2(m - 2) < m$,

adică $m < 4$, deci numărul va conţine numai factorii 2 şi 3. Deoarece $2 \cdot 2 \cdot 2 < 3 \cdot 3$, rezultă că numărul maxim se va scrie sub una din formele 3^m, $2 \cdot 3^n$ sau $2^2 \cdot 3^p$.

Primul caz este imposibil, deoarece numărul 1976 nu este multiplu de 3, al treilea caz este imposibil deoarece $1976 \neq 3p + 4$, rămînînd astfel posibil numai cel de-al doilea caz, găsindu-se astfel $n = 658$. Numărul cerut este deci $2 \cdot 3^{658}$.

109. Se consideră cele $(2p + 1)^q$ sisteme de numere $(x_1, x_2, \dots, x_q)$ în care $x_j\ (j = 1, 2, \dots, q)$ sînt numere întregi cu proprietatea $|x_j| \leqslant p$.

Pentru un astfel de sistem de numere va fi valabilă inegalitatea

$$|a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{iq}x_q| \leqslant qp,$$

deci numărul de sisteme posibile

$$(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1q}x_q, \dots, a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \dots + a_{pq}x_q)$$

care corespund sistemelor $(x_1, x_2, \dots, x_q)$ considerate nu depăşeşte $(2pq + 1)^p$.

Relaţia $(2pq + 1)^p < (2p + 1)^q$ este adevărată, deoarece este echivalentă cu $(4p^2 + 1)^p < (2p + 1)^{2p}$, adică cu $4p^2 + 1 < (2p + 1)^2$, care este evident satisfăcută. Rezultă din aceasta că există două sisteme distincte de numere $(x_1', x_2', \dots, x_q')$, $(x_1'', x_2'', \dots, x_q'')$ cu proprietăţile amintite (x_i' şi x_i'' sînt numere întregi şi nu depăşesc în modul numărul p), astfel ca $a_{i1}x_1' + \dots + a_{iq}x_q' = a_{i1}x_1'' + a_{i2}x_2'' + \dots + a_{iq}x_q''$ pentru $i = 1, 2, \dots p$. Cu notaţia $x_j = x_j' - x_j''$ se găseşte $|x_j| \leqslant 2p = q$, $x_j \neq 0$ pentru cel puţin unul din indicii j, $a_{i1} + a_{i2}x_2 + \dots + a_{iq}x_q = 0$ pentru $i = 1, 2, \dots, p$, ceea ce se cerea demonstrat.

110. Termenul general u_n se scrie sub forma

$$u_n = x_n + \frac{1}{x_n}.$$

Relaţia de recurenţă devine

$$x_{n+1} + \frac{1}{x_{n+1}} = x_n x_{n-1}^2 + \frac{1}{x_n x_{n-1}^2} + \left(\frac{x_n}{x_{n-1}^2} + \frac{x_{n-1}^2}{x_n}\right) - \frac{5}{2}. \quad (1)$$

Se impune şirului $\{x_n\}$ condiţia

$$x_{n+1} = x_n x_{n-1}^2 \qquad (x_0 = 1,\ x_1 = 2).$$

Această condiţie implică

$$\frac{x_{n+1}}{x_n^2}+\frac{x_n^2}{x_{n+1}}=\frac{x_n x_{n-1}^2}{x_n^2}+\frac{x_n^2}{x_n x_{n-1}^2}=\frac{x_n}{x_{n-1}^2}+\frac{x_{n-1}^2}{x_n},$$

deci $\frac{x_n}{x_{n-1}^2}+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}$ este o constantă, care poate fi determinată dînd lui n valoarea 1. Rezultă astfel constanta $\frac{5}{2}$.

În concluzie, dacă şirul de termen general x_n este definit prin $x_0=1$, $x_1=2$, $x_{n+1}=x_n x_{n-1}^2$, şirul de termen general $u_n=x_n+\frac{1}{x_n}$ satisface relaţiile $u_0=2$, $u_1=\frac{5}{2}$, $u_{n+1}=u_n(u_{n-1}^2-2)-u_1$, deci va fi şirul dat în enunţul problemei. Există, evident, un astfel de şir avînd termenii numere întregi mai mari ca 1, deci $[u_n]=x_n$. Pentru determinarea lui x_n se observă că $x_n=2^{a_n}$, şirul de termen general a_n fiind dat de $a_0=0$, $a_1=1$, $a_{n+1}=a_n+2a_{n-1}$. Pentru a găsi acest ultim şir se consideră ecuaţia ataşată relaţiei de recurenţă care îl defineşte, z^2-z-2, care are rădăcinile $z_1=2$ şi $z_2=-1$, deci $a_n=c_1\cdot 2^n+c_2(-1)^n$. Deoarece $a_0=0$, rezultă că suma $c_1+c_2=0$, iar $a_1=1$ atrage după sine $2c_1-c_2=1$, adică $c_1=-c_2=\frac{1}{3}$, termenul general al acestui şir fiind în consecinţă $a_n=\frac{1}{3}[2^n-(-1)^n]$. Din $2\equiv-1 \pmod 3$ care implică $2^n\equiv(-1^n) \pmod 3$ rezultă că a_n este număr întreg.

111. R e z o l v a r e a I. Se notează cu O centrul pătratului. Pătratul este invariant faţă de rotaţii cu unghiuri de 90°, 180° şi 270° în jurul punctului O, precum şi faţă de simetriile relative la cele două drepte care trec prin O şi sînt paralele cu laturile; întreaga figură va fi invariantă faţă de aceste transformări. Mijloacele segmentelor din cea de-a doua grupă din enunţ pot fi aduse prin una sau două astfel de simetrii oricare peste un altul, iar rotaţiile menţionate arată că mijloacele segmentelor din prima grupă formează un pătrat concentric cu cel dat. Dreapta care uneşte punctul O cu mijlocul segmentului KL formează cu OK un unghi de 45°, de acelaşi sens ca şi $\sphericalangle AOB$.

Se va demonstra că cele 12 puncte se află la egală distanţă de punctul O şi că unghiurile formate de dreptele care unesc aceste

puncte cu O sînt de 30°. Dacă se notează cu Q mijlocul lui AB (fig. 58) şi cu X mijlocul lui BK, se va arăta că $OX = OK\frac{\sqrt{2}}{2}$ şi $\sphericalangle XOQ = 75°$ (dreapta punctată uneşte O cu mijlocul lui KL) în modul următor:

$$OQ = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}AK = QX,$$

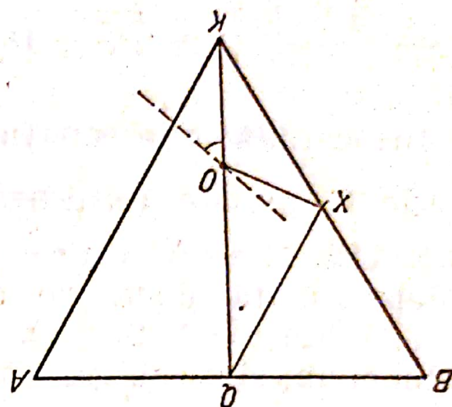


Fig. 58

deci ΔOQX este isoscel. Rezultă astfel că $\sphericalangle XOQ = \frac{1}{2}(180° - \sphericalangle OQX) = \frac{1}{2}[180° - (\sphericalangle OQB - \sphericalangle BQX)] = \frac{1}{2}[180° - (90° - 60°)] = 75°$.

În ΔOKX unghiul cu vîrful în K este de 30°, deci lungimea înălţimii din O este jumătate din cea a lui OK, unghiul din vîrful X este $\sphericalangle QOX - 30° = 75° - 30° = 45°$, deci $OX = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}OK$, ceea ce trebuia demonstrat.

R e z o l v a r e a II. Se alege un sistem de axe avînd originea în centrul pătratului, iar axele paralele cu laturile acestuia. Fără a restrînge generalitatea, se face presupunerea că $OA = 1$, iar punctul A se află în primul cadran (aceasta înseamnă de fapt alegerea unităţii de măsură în sistemul luat şi determinarea corespunzătoare a axelor). Afixul punctului A este $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$, afixul lui B este $-\bar{z}$ etc. Distanţa dintre punctul K şi mijlocul segmentului AB fiind $\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$, înseamnă că afixul lui K este $(\sqrt{2} - \sqrt{6})\frac{i}{2}$, al lui L este $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$ etc. Deoarece afixul mijlocului unui segment este egal cu semisuma afixelor extremităţilor segmentului, se pot calcula afixele tuturor celor 12 puncte care ne interesează. Pentru mijlocul segmentului AK se găseşte afixul $\frac{\sqrt{2}}{4} + i\,\frac{2\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$ care, scris sub forma trigonometrică, va fi $\frac{\sqrt{3} - 1}{2}\left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\right)$. Din

$\cos\alpha = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ se deduce $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, şi, ţinînd seama de faptul că α este un unghi ascuţit, rezultă că $\alpha = \frac{\pi}{12}$. Calculînd astfel toate celelalte afixe, se obţine, pentru acestea $z_k = \frac{\sqrt{3}-1}{2}\left(\cos\frac{k\pi}{12} + i\sin\frac{k\pi}{12}\right)$ $(k = 1, 2, \ldots, 23)$. Deoarece z_k constituie rădăcinile ecuaţiei $z^{12} = -\rho^{12}$, $\left(\rho = \frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$, înseamnă că cele 12 puncte formează un dodecagon regulat.

112. Rezolvarea I. O succesiune finită $\{x_n\}$ este complet determinată dacă se cunosc toate sumele $s_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Se notează $s_0 = 0$ şi se observă că ipotezele din enunţ sînt echivalente cu $s_n > s_{n+7}$ şi $s_n > s_{n-11}$ pentru valorile lui n pentru care au sens. În cazul unui şir care conţine cel puţin 17 termeni se obţine $s_{17} > s_6 > s_{13} > s_2 > s_9 > s_{16} > s_5 > s_{12} > s_1 > s_8 > s_{15} > s_4 > s_{11} > s_0 = 0 > s_7 > s_{14} > s_3 > s_{10} > s_{17}$, ceea ce ar constitui o contradicţie. Dacă succesiunea conţine 16 termeni, atunci termenii extremi dinde inegalităţile de mai sus dispar, iar inegalităţile rămase reprezintă toate condiţiile impuse acesteia, condiţii evident necontradictorii, ceea ce dă reprezentarea tuturor succesiunilor cu 16 elemente satisfăcînd condiţiile din enunţ.

Rezolvarea II. Se arată că într-o succesiune finită de numere reale în care suma oricăror m termeni consecutivi este negativă iar suma oricăror p termeni consecutivi este pozitivă, numărul maxim de termeni este $m + p - d - 1$, unde d este cel mai mare divizor comun al numerelor m şi p.

În prima etapă se arată că existenţa unei succesiuni finite cu $m+p-d$ termeni conduce la contradicţie. Dacă termenii se grupează cîte d, se obţine, considerînd sumele respective, o nouă succesiune cu $\frac{1}{d}(m+p-d)$ termeni. În acest mod se reduce problema la cazul $d=1$.

Presupunînd că $d = 1$, se notează, ca şi la rezolvarea I, $s_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$, succesiune fiind $x_1, x_2, \ldots$ Dacă sînt k termeni, $s_n > s_{m+n}$ pentru $n = 0, 1, \ldots, k - m$, iar $s_n > s_{n-p}$ este adevărată pentru $n = p, p+1, \ldots, k$. În cazul în care $p \leqslant k - m + 1$, deci $k \geqslant p + m - 1$, orice $n = 0, 1, \ldots, k$ apare în una din cele două situaţii, mulţimea finită de numere $s_0, s_1, \ldots, s_k$ neavînd element minimal, ceea ce este absurd. S-a demonstrat în acest fel că

numărul maxim de termeni ai unie succesiuni cu proprietățile din enunț este cel mult egal cu $m + p - d - 1$.

În a doua etapă a demonstrației se arată că este posibilă construirea unei succesiuni avînd $m+p-d-1$ termeni și satisfăcînd proprietățile din enunț. Nu se mai face presupunerea $d = 1$, deoarece, grupînd ca și la prima etapă termenii, se neglijează o parte din condiții. La fel ca și în cadrul rezolvării I, succesiunea este complet determinată dacă se cunosc toate sumele s_n. Trebuie arătat că ansamblul de inegalități, care a fost considerat în prima rezolvare, nu conduce la contradicție. Este necesar pentru apariția unei contradicții ca $s_{i_1} > > s_{i_2} > \ldots > s_{i_q}$, pentru indicii $i_1, i_2, \ldots, i_q$ presupuși diferiți doi cîte doi. Asemenea inegalități apar numai pentru $i_{r+1} - i_r = m$ sau $i_{r+1} - i_r = p$, ceea ce arată că $i_r \equiv i_1 \pmod d$. Se deduce astfel că $q \leqslant \frac{m+p-d}{d}$. Notînd cu α numărul de diferențe egale cu m și cu β numărul de diferențe egale cu $-p$, se obține, pe de o parte, că $\alpha m - \beta p = 0$, deci p este divizor al lui αm, și cum numai d se divide la $\frac{m}{p}$, rezultă că $\alpha \geqslant \frac{p}{d}$ iar, pe de altă parte, $q = \alpha + \beta$. Deci $\frac{m+p}{d} \leqslant \alpha + \beta = q \leqslant \frac{m+p-d}{d}$, ceea ce este fals. Sistemul de egalități considerat nu poate conduce la contradicție, deci se poate construi o succesiune conținînd $m + p - d - 1$ termeni cu proprietățile enunțate.

113. Fie G_n grupul multiplicativ al claselor de resturi modulo n, prime cu n, H un subgrup al lui G_n diferit de G_n, iar V mulțimea tuturor numerelor întregi mai mari decît 1 care aparțin unei clase modulo n din H. Există în acest caz numerele $m_1, m_2, m_3, m_4 \in V_n$, distincte două cîte două, indecompozabile în V, astfel încît $m_1 m_2 = = m_3 m_4$. Pentru a demonstra această afirmație se folosește următoarea propoziție:

Lemă. Mulțimea numerelor prime care nu aparțin lui V și nu divid pe n este infinită.

Se presupune că mulțimea considerată în enunțul lemei ar fi finită și s-ar compune din numerele prime $p_1, p_2, \ldots, p_s$. Dacă $p_1, p_2, \ldots, p_s$ nu aparțin mulțimii V, atunci numărul $p_1 p_2 \ldots p_s + n$ nu este în V, deci va avea un divizor prim care nu se află în V (H fiind grup), divizor care nu poate coincide cu nici unul din numerele $p_1, p_2, \ldots, p_s$, deoarece altfel ar rezulta că numărul respectiv divide pe n; în mod analog se observă că acel divizor nu poate divide pe n.

Aceasta constituie însă o contradicţie. Dacă $p_1 \ldots p_s$ aparţine lui V, atunci $p_1^2 \ldots p_s$ nu aparţine lui V şi raţionamentul de mai sus conduce de asemenea la o contradicţie. Mulţimea din lemă nu poate fi vidă, deoarece atunci toţi factorii primi ai oricărui număr prim cu n ar fi în V, deci s-ar contrazice ipoteza prin obţinerea egalităţii $H = G_n$.

Pe baza acestei leme se vor determina două numere prime diferite p şi q nesituate în V, nedivizînd pe n şi astfel încît $p \equiv q \pmod{n}$. Fie $k > 1$ exponentul minim pentru care $p^k \in V$. Se poate lua $m_1 = p^k$, $m_2 = q^k$, $m_3 = p^{k-1}q$, $m_4 = pq^{k-1}$, care sînt deci congruente modulo n în V (deoarece $m_1 = p^k \in V$) şi orice divizor al lor este congruent cu p^r modulo n, $r < k$, ceea ce arată că acesta nu se găseşte în V, deci aceste numere sînt indecompozabile în V.

114. Se scrie $f(x) + f(x + \pi) \geqslant 0$. Se obţine $2 - 2A\cos 2x - 2B\sin 2x \geqslant 0$ pentru orice x. Cu substituţia $A = \sqrt{A^2 + B^2}\cos\alpha$ şi $B = \sqrt{A^2 + B^2}\sin\alpha$, se obţine $\sqrt{A^2 + B^2}\cos(2x - \alpha) \leqslant 1$ pentru orice x, ceea ce pentru $x = \dfrac{\alpha}{2}$ conduce la $A^2 + B^2 \leqslant 1$.

Dacă se scrie $f(x) + f\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) \geqslant 0$, se găseşte $2 - a(\cos x - \sin x) - b(\cos x + \sin x) \geqslant 0$, deci $2 - \sqrt{2}\,a\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) - 2b\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) \geqslant 0$, şi, procedînd ca mai sus, $\sqrt{a^2 + b^2}\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4} - \beta\right) \leqslant \sqrt{2}$, pentru orice x, rezultînd că $a^2 + b^2 \leqslant 2$.

Observaţie. Reciproca afirmaţiei din enunţ nu este adevărată.

115. Mai întîi se determină numerele q şi r. Pe de o parte $q \leqslant [\sqrt{1977}] = 44$. Obţinerea unei inegalităţi de sens contrar pleacă de la $a^2 + b^2 \geqslant \dfrac{1}{2}(a + b)^2$, inegalitate imediată. Ţinînd seama de aceasta şi de faptul că $r < a + b$, se găseşte că $q = \left[\dfrac{a^2 + b^2}{a + b}\right] \geqslant \dfrac{a^2 + b^2}{a + b} - 1 \geqslant \dfrac{1}{2}(a + b) - 1 > \dfrac{r}{2} - 1$. Inegalitatea $q \leqslant 43$ implică $r \geqslant 1977 - 43^2 = 128$, deci $43 \geqslant q > \dfrac{r}{2} - 1 \geqslant 63$, ceea ce constituie o contradicţie. S-a demonstrat astfel că $q = 44$, $r = 1977 - 44^2 = 41$.

În continuare se scrie $a^2 + b^2 = 44(a + b) + 41$ sau, altfel, $(a - 22)^2 + (b - 22)^2 = 2 \cdot 22^2 + 41 = 1009$. Pentru a reprezenta numărul 1009 ca sumă a două pătrate perfecte nu este nevoie a face $[\sqrt{1009}] + 1$ încercări. Se ține seama de faptul că ultima cifră a unui pătrat perfect în scriere zecimală este 0, 1, 4, 5, 6 sau 9. Suma terminată cu 9 se obține numai din $0 + 9$ sau $4 + 5$, ceea ce limitează încercările la 0, 3, 10, 15, 20, 25 și 30. Se obține soluția unică a acestei scrieri sub forma $1009 = 28^2 + 15^2$, ceea ce conduce la $a - 22 = \pm 28$, $b - 22 = \pm 15$. Soluțiile vor fi : (50, 37), (37, 50), (50, 7), (7, 50). Pentru toate este verificată inegalitatea $a + b > r = 41$.

116. Relația $f(n+1) > f[(n)]$ arată că $\min\{f(n) \mid n \in N\}$ este obținut numai pentru cazul $n = 1$, deci $f(n) > 1$ pentru $n > 1$. Dacă se consideră restricția lui f la mulțimea $\{2, 3, \ldots\}$, valorile acestei restricții sînt tot în mulțimea $\{2, 3, \ldots\}$ și deci $f(n) > f(2)$ pentru $n > 2$. Se demonstrează apoi prin inducție față de n că $n \leqslant f(n) < f(m)$ pentru $m > n$, pasul de la n la $n + 1$ realizîndu-se prin considerarea restricției lui f la mulțimea $\{n+1, n+2, \ldots\}$. Stabilindu-se monotonia strictă a lui f, se deduce $f(n) \geqslant n$, iar deoarece din enunț $f(n) < f(n+1)$, rezultă $f(n) = n$.

REZOLVĂRILE PROBLEMELOR DIN MATERIALELE JURIULUI

117. Se consideră punctele A și B între care distanța să fie minimă. Se alege din celelalte puncte punctul C, astfel ca $\sphericalangle ABC$ să fie maxim. Punctele A, B, C nu se află, conform enunțului, pe aceeași dreaptă. Se demonstrează că cercul determinat de punctele A, B, C este cel căutat. Unghiul ACB este ascuțit (se poate demonstra și că $\sphericalangle ABC \leqslant 60°$). În caz contrar acesta ar fi cel mai mare unghi în triunghiul ABC și, în consecință $AB > AC$ și $AB > BC$, ceea ce ar contrazice alegerea punctelor A și B. Prin reducere la absurd, se presupune că există un punct M printre celelalte situat în interioul cercului.

C a z u l I. Punctul M este situat în interiorul segmentului de cerc ACB. Rezultă că $\sphericalangle AMB > \sphericalangle ACB$, ceea ce contrazice alegerea punctului C.

C a z u l II. Punctul M este situat în interiorul segmentului de cerc complementar lui ACB, ceea ce înseamnă că $\sphericalangle AMB$ este unghi

obtuz, deci este contrazisă alegerea punctului C. Rezultă astfel că nu se găsesc puncte situate în interiorul cercului dat. Pe cerc este posibil să se afle unele din acestea, de exemplu dacă ele constituie vîrfurile unui poligon cu n laturi înscris în cerc.

118. Se poate scrie

$$(1 + a_1)(1 + a_2)\dots(1 + a_n) = \left(1 + \frac{1}{a_1}\right)\left(1 + \frac{1}{a_2}\right)\dots\left(1 + \frac{1}{a_n}\right).$$

Prin urmare

$$[(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n)]^2 = (1 + a_1)\left(1 + \frac{1}{a_1}\right)\dots(1+a_n)\left(1 + \frac{1}{a_n}\right).$$

Astfel, deoarece

$$\left[(1 + a_i)\left(1 + \frac{1}{a_i}\right)\right]^2 = 1 + 1 + a_i + \frac{1}{a_i} \geqslant 2 + 2 = 4,$$

rezultă

$$[(1 + a_1)(1 + a_2)\dots(1 + a_n)]^2 \geqslant 4^n.$$

119. Se consideră toate triunghiurile avînd vîrfurile în punctele date şi se alege ΔABC care conţine cel mai mare număr de puncte. Dreptele AB, BC şi CA împart planul în trei tipuri de domenii: I, II şi III (fig. 59).

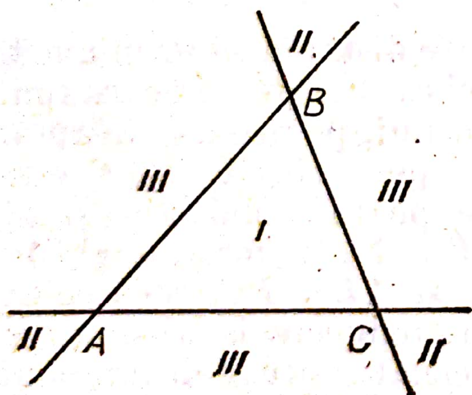


Fig. 59

a) Dacă cel puţin un punct D este situat în interiorul unuia din domeniile de tipul III (fie acesta de bază AB), patrulaterul $ABCD$ este convex.

b) Dacă ambele puncte D şi E (v. fig. 41) se află în interiorul triunghiului, dreapta DE intersectează numai două laturi ale acestuia (de exemplu AB şi BC). Conform enunţului, dreapta DE nu poate trece prin vîrful triunghiului, deci punctele A, D, E, C formează un patrulater convex.

c) Din construcţia triunghiului ABC rezultă că nu se găsesc puncte situate în domeniile de tipul II. Dacă ar exista un punct D în astfel de domeniu, fie acesta mărginit de prelungirile dincolo de punctul B ale laturilor AB şi CB, ΔADC ar include ΔABC, în interiorul său aflîndu-se astfel mai multe puncte.

120. Pe baza condiţiilor $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{3}$, $\frac{1}{\sin\alpha} < 2$ şi $\frac{1}{\cos\alpha} < 2$, rezultă că $0 \leqslant \frac{\pi \sin x}{4 \sin\alpha} \leqslant \frac{\pi}{4\sin\alpha} < \frac{\pi}{2}$ şi $0 \leqslant \frac{\pi\cos x}{4\cos\alpha} \leqslant \frac{\pi}{4\cos\alpha} < \frac{\pi}{2}$, deci ambele tangente sînt pozitive.

Dacă $x < \alpha$,

$$\operatorname{tg}\frac{\pi \sin x}{4\sin\alpha} + \operatorname{tg}\frac{\pi\cos x}{4\cos\alpha} \geqslant \operatorname{tg}\frac{\pi\cos x}{4\cos\alpha} > 1 = \operatorname{tg}\frac{\pi\cos\alpha}{4\cos\alpha}.$$

Dacă $x = \alpha$, se găseşte că $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha} + \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha} = 2 > 1.$

Dacă $x > \alpha$,

$$\operatorname{tg}\frac{\pi \sin x}{4\sin\alpha} + \operatorname{tg}\frac{\pi\cos x}{4\cos\alpha} \geqslant \operatorname{tg}\frac{\pi\sin x}{4\sin\alpha} > 1 = \operatorname{tg}\frac{\pi\sin\alpha}{4\sin\alpha}.$$

121. Fie $A_1, A_2, \ldots, A_n$ vîrfurile poligonului m (fig. 60). În fiecare vîrf al poligonului se construiesc, în exterior, în planul poligonului perpendicularele pe cele două laturi care trec prin vîrful respectiv. Se obţine astfel o împărţire a planului poligonului în următoarele părţi:

1) porţiunea de plan mărginită de poligonul $A_1A_2 \ldots A_n$;

2) dreptunghiurile de înălţime infinită avînd bazele A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$, A_nA_1;

3) porţiunile de plan P_{A_1}, P_{A_2}, ..., P_{A_n}, mărginite de unghiurile notate cu literele A_1', A_2', ..., A_n' respectiv. Se construiesc în spaţiu două prisme avînd poligonul m ca bază, lungimea înălţimii R, situate de o parte şi de alta a planului poligonului. Feţelor laterale ale prismei duble astfel construite li se adaugă, în exteriorul prismei, cîte o jumătate de cilindru circular de rază R şi înălţime egală cu latura respectivă; axa unui astfel de cilindru coincide cu latura poligonului. Corpul astfel obţinut se completează adăugînd pentru fiecare vîrf fusul sferic determinat de bazele a doi cilindri care au centrul în acest vîrf. Se obţine în acest fel corpul M_1 care, după cum

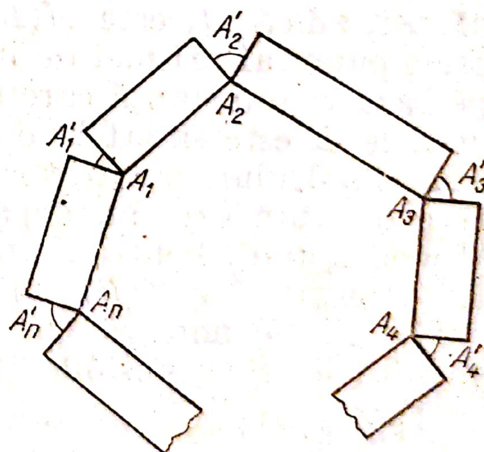


Fig. 60

se va demonstra, va fi corpul căutat. În figură este reprezentată proiecţia acestuia pe planul poligonului, formată din însuşi poligonul, care este proiecţia prismei, n dreptunghiuri de înălţime R construite pe fiecare latură a poligonului şi n sectoare circulare de rază R în fiecare vîrf al poligonului. Unghiul fiecărui sector este suplimentar unghiului poligonului cu care are acelaşi vîrf şi are măsura pozitivă, deoarece poligonul m este convex. Două dreptunghiuri infinite vecine nu au puncte comune afară de vîrful respectiv al poligonului, deci corpurile care se proiectează după aceste două dreptunghiuri au în comun numai punctele perpendicularei pe planul poligonului în vîrful respectiv. Se va calcula în continuare volumul corpului M_1. Volumul prismei duble este $2RS$.

Volumul tuturor jumătăţilor de cilindru este

$$\frac{1}{2}\pi R^2(A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots + A_{n-1}A_n + A_nA_1) = \frac{1}{2}\pi l R^2.$$

iar cel al tuturor fuselor sferice

$$\frac{2}{3}R^3(\hat{A}_1' + \hat{A}_2' + \ldots + \hat{A}_n') = \frac{2}{3}R^3[n\pi - (\hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \ldots + \hat{A}_n)] = \frac{4}{3}\pi R^3,$$

ceea ce arată că ultimul volum este egal cu volumul sferei de rază R În fine

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 + \frac{1}{2}\pi l R^2 + 2SR.$$

Este necesar să se verifice că acest volum este cel al corpului căutat, adică M_1 este $M(R)$. Este evident că $M_1 \leqslant M(R)$, deoarece orice punct al prismei de înălţime R este situat faţă de proiecţia sa pe bază la o distanţă care nu depăşeşte R, orice punct al cilindrului de rază R este situat la o distanţă care nu depăşeşte pe R faţă de axa cilindrului, iar fiecare punct al sferei de rază R este situat la o distanţă care nu depăşeşte R de centrul sferei (care este vîrf al poligonului). Pentru a arăta incluziunea de sens contrar, fie punctul oarecare $X \in M(R)$, iar Y un punct al lui m, astfel ca distanţa $XY \leqslant R$. Se notează cu Z proiecţia punctului X pe planul poligonului m. Sînt posibile trei cazuri:

1) Z aparţine porţiunii plane mărginite de poligonul m;

2) Z aparţine unui dreptunghi de înălţime infinită, fie baza acestuia A_1A_2;

3) Z aparţine unei porţiuni de plan de cel de-al treilea tip, fie aceasta P_{A_1}.

În primul caz $XZ \leqslant XY \leqslant R$, ceea ce înseamnă că X aparţine prismei. În cel de-al doilea caz fie Z_1 proiecţia punctului Z pe A_1A_2. Evident, Z_1 se află pe segmentul A_1A_2, iar $XZ_1 \perp A_1A_2$ pe baza teoremei celor trei perpendiculare. Punctul Z_1 este punctul cel mai apropiat de Z printre toate punctele porţiunii mărginite de poligonul m. Este evident că celelalte puncte ale segmentului A_1A_2 şi chiar ale dreptei A_1A_2 sînt mai îndepărtate de Z decît Z_1, iar celelalte puncte din porţiunea plană mărginită de m sînt separate de Z de către dreapta A_1A_2 şi deci sînt şi mai îndepărtate. Astfel, dintre toate oblicele care unesc punctul X cu puncte din porţiunea considerată oblica XZ_1 are proiecţia cea mai scurtă, adică dintre toate oblicele de acest fel, aceasta este cea mai scurtă, $XZ_1 \leqslant XZ \leqslant R$, deci punctul X se găseşte pe semidreapta $Z_1X \perp A_1A_2$ la o distanţă care nu depăşeşte pe R de axa A_1A_2 a cilindrului respectiv, deci în jumătatea de cilindru corespunzătoare.

În cazul al treilea se consideră triunghiul ZAY. Unghiul acestuia ZAY (pentru $Y \not\equiv A$) este evident obtuz, deoarece pe baza faptului că poligonul m este convex, punctul Y este situat în interiorul unghiului A_1 ($\hat{A}_1 < 180°$), format de semidreptele A_1A_2 şi A_1A_n, iar punctul Z prin construcţie este situat în unghiul format de perpendicularele duse la aceste semidrepte în exteriorul unghiului acestora. Rezultă astfel că $ZA_1 \leqslant ZY$ şi, prin urmare, $XA_1 \leqslant XY \leqslant R$, adică X se află în interiorul fusului respectiv de sferă.

În acest mod, s-a demonstrat că $M_1 = M(R)$.

122. Perpendiculara comună p la axele l_1 şi l_2 ale celor doi cilindri îi intersectează pe aceştia după două segmente egale cu cele două diametre respectiv. Sînt posibile trei cazuri în care se pot afla cele două segmente astfel determinate:

1. Intersecţia acestora este vidă.
2. Intersecţia acestora conţine un singur punct.
3. Intersecţia acestora este segmentul s.

În primul caz cele două suprafeţe nu se intersectează. În cel de al doilea prin punctul unic de intersecţie se duce un plan perpendicular pe dreapta p. Se observă uşor că acest plan va fi tangent la ambii cilindri avînd cu fiecare cîte o dreaptă comună. Aceste două drepte vor coincide cînd axele cilindrilor vor fi paralele şi prin urmare, în acest caz curba de intersecţie a cilindrilor va fi plană. Dacă axele cilindrilor nu sînt paralele, generatoarele după care este tangent planul se intersectează într-un punct care este singurul punct comun al celor doi cilindri. Chiar dacă acest punct nu se consideră drept curbă plană, intersecţia formată astfel dintr-un punct este totuşi „plană".

Se consideră cel de al treilea caz. Se face mai întîi presupunerea că axele cilindrilor nu sînt paralele. Printr-un punct arbitrar al lui s se duce planul Q perpendicular pe p, plan care intersectează fiecare cilindru după o pereche de generatoare paralele cu axa respectivă. Aceste patru drepte se intersectează două cîte două în patru puncte situate pe curba de intersecţie a celor doi cilindri. Este evident că aceste patru puncte nu sînt situate simultan pe aceeaşi dreaptă. De aceea, dacă curba de intersecţie este situată în întregime într-un plan, acesta poate fi numai Q. În acest caz curba de intersecţie nu poate fi plană, deoarece raţionamentele de mai sus se pot repeta pentru orice alt plan Q_1 care intersectează segmentul s. Dacă axele cilindrilor sînt paralele, atunci sînt paralele şi cele patru drepte din planul Q, deci raţionamentele precedente îşi pierd sensul. Se duce planul R perpendicular pe axele cilindrilor, plan care se intersectează cu cilindrii după două cercuri, care, conform presupunerii făcute se intersectează. Este evident că înşişi cilindrii se intersectează după două generatoare care sînt paralele cu axele şi trec prin punctele de intersecţie ale acestor cercuri. Perechea de drepte paralele este situată de asemenea într-un plan.

În concluzie, doi cilindri se intersectează după o curbă plană dacă şi numai dacă axele lor sînt paralele. Curba de intersecţie nu degenerează într-un punct sau în mulţimea vidă dacă

$$d \leqslant r_1 + r_2,\ r_1 \leqslant d + r_2,\ r_2 \leqslant r_1 + d,$$

d fiind distanţa dintre axe iar r_i $(i = 1, 2)$ razele cilindrilor.

123. Condiţiile problemei permit numai echilibrarea balanţei, vărsarea zahărului de pe un taler pe celălalt şi adăugarea greutăţii fie unui taler, fie altuia. În şirul de cîntăriri a cărui schemă se dă în continuare, zahărul cîntărit deja se varsă pe talerul B, balanţa se echilibrează cu zahăr care se adaugă pe talerul A, greutatea G de 1 g adăugîndu-se cîteodată pe talerul B.

Numărul cîntăririi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Talerul A	1	2	4	8	16	31	63	125	250	500
Talerul B	G	$1+G$	$3+G$	$7+G$	$15+G$	31	$62+G$	125	250	500

După cea de a zecea cîntărire, vărsînd la un loc zahărul ambelor talere se obţine 1 kg.

Se poate da şi o altă schemă a cîntăririlor, dacă se permite aşezarea greutăţii pe talerul A.

Numărul cîntăririi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Talerul A	1	2	4	8	16	32	$62+G$	125	250	500
Talerul B	G	$1+G$	$3+G$	$7+G$	$15+G$	$31+G$	63	125	250	500

Problema nu poate fi rezolvată printr-un număr de cîntăriri mai mic decît 10, deoarece după o cîntărire, masa de zahăr măsurată prin aceasta poate fi cel mult egală cu masa de zahăr cîntărit anterior, plus un gram. Astfel, după nouă cîntăriri nu se poate măsura mai mult de 511 grame.

124. Valoarea x trebuie să îndeplinească condiţiile:

$$\sin 3x \cdot \cos(60° - 4x) = -1, \qquad (1)$$

$$\sin(60° - 7x) - \cos(30° + x) + m \neq 0. \qquad (2)$$

Ecuaţia (1) va avea soluţiile date de:

a) $\sin 3x + 1 = 0$, iar $\cos(60° - 4x) = 1$, rezultînd că $x = k \cdot 120° + 90°$, şi, în acelaşi timp $x = l \cdot 90° + 15°$, prin urmare $6l - 8k = 5$, ceea ce nu se poate, deoarece membrul stîng este par, iar cel drept este impar.

b) $\sin 3x = 1$, iar $\cos(60° - 4x) = -1$. Rezultă $x = k \cdot 120° + 30°$ şi, în acelaşi timp, $x = l \cdot 90° + 60°$, de aceea $4k = 3l + 1$ sau $k - 1 = 3(l - k)$, prin urmare $k = 1 + 3l$ şi, în consecinţă, $x = l \cdot 360° + 150°$. Dacă se înlocuieşte această valoare a lui x în (2), se obţine condiţia $m \neq 2$.

125. Fie $f(x) = \dfrac{x + 189}{1964}$ şi $g(x) = \sin x$. Se observă că f este o funcţie monotonă, iar $|g(x)| \leqslant 1$. Soluţiile ecuaţiei date vor fi acele şi numai acele numere reale ξ pentru care $f(\xi) = g(\xi)$.

Fie $f(a) = -1$ şi $f(b) = 1$. În acest caz $a = -2153$, $b = 1775$, iar $f(c) = 0$ pentru $c = -189$.

Pe segmentul $[0, 1775]$ se pot aşterne 282 intervale de lungime 2π, iar pe $[-2153, 0]$ se pot aşterne 342 astfel de intervale. Pe segmentul $[0, 1775]$, $f(x) > 0$, iar pe fiecare interval de lungime 2π inclus în acest segment dreapta de ecuaţie $f(x) = y$ intersectează graficul funcţiei $g(x) = \sin x$ în două puncte. Pe cel de-al 283-lea interval de lungime 2π, în partea sa comună cu segmentul $[0, 1775]$ funcţia f ia o valoare egală cu 1 într-un punct situat la dreapta lui ξ ($g(\xi) = 1$), de aceea pe acest interval există două puncte de intersecţie. Astfel, pe segmentul $[0, 1775]$ se află $282 \cdot 2 + 2 = 566$ rădăcini ale ecuaţiei.

Segmentul $[0, -2153]$ se descompune în două segmente $[0, -189]$ şi $[-189, -2153]$. Pe primul dintre acestea se pot aşterne 30,06 ... intervale de lungime 2π, pe care $f(x) > 0$. De aceea se găsesc 60 de puncte de intersecţie.

Pe cel de al 31-lea interval funcţia f schimbă semnul, deci egalitatea $f(\xi) = g(\xi)$ se realizează numai într-un singur punct. Pe celelalte 311 intervale $y = f(x) < 0$, în consecinţă, pe fiecare interval se vor găsi două puncte de intersecţie. Pe partea care rămîne din cel de-al 343-lea interval se aşterne mai mult de o jumătate de sinusoidă; deoarece $-1 \leqslant \sin x < 0$ şi $-1 < f(x) < 0$, se mai găsesc pe acest interval două puncte de intersecţie. Astfel se găsesc în total 685 de puncte de intersecţie avînd abscisele negative.

Ecuaţia va avea, în consecinţă, 1251 rădăcini.

126. Fie numerele naturale $x_1 \leqslant y_1$ şi $x_2 \leqslant y_2$ astfel ca numărul natural z să se poată scrie

$$z = x_1! + y_1! = x_2! + y_2!. \tag{1}$$

Se poate face presupunerea că $x_1 < x_2$ (în caz contrar se poate schimba numeraţia). Nu este posibil astfel ca $y_1 < x_2$, deoarece s-ar obţine

$$x_1! + y_1! < x_2! + x_2! \leqslant x_2! + y_2!,$$

ceea ce contrazice relaţia (1). De aceea $y_1 \geqslant x_2$, iar x_2 satisface inegalităţile $x_2 \leqslant y_2$, $x_2 \leqslant y_1$, de aceea numărul $x_2! + y_2! - y_1!$ se divide la $x_2!$. Pe baza condiţiei (1) $x_1!$ se divide de asemenea la $x_2!$, ceea ce contrazice presupunerea că $0 < x_1 < x_2$. Nu există deci un număr natural z cu proprietăţile din enunţ.

127. Fie n un număr natural care satisface condiţia (1) din enunţ. Se obţine astfel

$$x \cdot \underbrace{\overline{111\ldots1}}_{n \text{ cifre}} - y\, \underbrace{\overline{111\ldots1}}_{n \text{ cifre}} = z^2(\underbrace{\overline{111\ldots1}}_{n \text{ cifre}})^2. \tag{2}$$

Ţinînd seama de faptul că pentru orice număr natural k

$$10^{k-1} + 10^{k-2} + \ldots + 10 + 1 = \frac{10^k - 1}{10 - 1},$$

se găseşte din (2)

$$x\,\frac{10^{2n} - 1}{9} - y\,\frac{10^n - 1}{9} = z^2\,\frac{(10^n - 1)^2}{9^2}.$$

După simplificarea cu $10^n - 1$ şi eliminarea numitorilor, rezultă

$$9(10^n + 1)x - 9y = (10^n - 1)z^2,$$

sau, sub altă formă,

$$(9x - z^2)\,10^n = 9y - 9x - z^2. \qquad (3)$$

Conform enunţului există numerele naturale $n_1 \neq n_2$, pentru care relaţia (1) este satisfăcută, deci este îndeplinită şi relaţia (3), adică

$$(9x - z^2)10^{n_1} = 9y - 9x - z^2; \ (9x - z^2)\,10^{n_2} = 9y - 9x - z^2.$$

Scăzînd aceste egalităţi, se ajunge la

$$(9x - z^2)\,(10^{n_1} - 10^{n_2}) = 0.$$

Deoarece $10^{n_1} - 10^{n_2} \neq 0$, este necesar ca

$$9x - z^2 = 0. \qquad (4)$$

Folosind relaţia (4) în egalitatea (3), se găseşte

$$9y - 9x - z^2 = 0. \qquad (5)$$

Din relaţiile (4) şi (5) rezultă

$$x = k^2, \ y = 2k^2, \ z = 3k \qquad (k \in Z).$$

Fiindcă $0 < x, \ y, \ z \leqslant 9$, problema admite două rezolvări: $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$ şi $x = 4$, $y = 8$ şi $z = 6$. Oricare ar fi una din acestea, relaţia (3), deci şi relaţia (1) sînt îndeplinite pentru orice n. Egalitatea este deci satisfăcută pentru orice număr natural n.

128. Fie numerele naturale i, j, k şi l care satisfac condiţiile $1 \leqslant i < j \leqslant n$, $1 \leqslant k < l \leqslant n$. În acest caz

$$\frac{1}{a_i a_j} \geqslant \frac{4}{(a_i + a_j)^2}, \qquad (1)^*$$

$$\frac{1}{a_i a_j} + \frac{1}{a_k a_l} \geqslant 2\,\frac{1}{\sqrt{a_i a_j}} \cdot \frac{1}{\sqrt{a_k a_l}} \geqslant 4\,\frac{2}{(a_i + a_j)(a_k + a_l)}. \qquad (2)$$

* Inegalităţile (1) şi (2) se deduc din inegalităţile

$$ab \leqslant \frac{(a+b)^2}{4}, \ a + b \geqslant 2\sqrt{ab}, \qquad a \geqslant 0, \ b \geqslant 0.$$

Adunînd egalitățile (1) și (2), se obține inegalitatea dată. Egalitatea are loc dacă și numai dacă

$$\frac{1}{a_i a_j} = \frac{4}{(a_i + a_j)^2}, \tag{1'}$$

$$\frac{1}{a_i a_j} + \frac{1}{a_k a_l} = 4\frac{2}{(a_i + a_j)(a_k + a_l)}, \tag{2'}$$

adică în cazul în care

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_n.$$

129. Fie Z_n mulțimea tuturor segmentelor care unesc cele n puncte și care împart cercul în n regiuni. Se convine ca aceste puncte să fie numerotate $A_1, A_2, \ldots, A_n$ în sensul rotației acelor de ceasornic și se adaugă încă un punct A_{n+1} între A_n și A_1. Segmentul $A_{n+1}A_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ împarte în două atîtea regiuni, în cîte părți este împărțit de către segmentele mulțimii Z_n. Segmentul $A_{n+1}A_k$ intersectează segmentele care unesc oricare din punctele $A_1, A_2, \ldots, A_{k-1}$ cu oricare din punctele $A_{k+1}, A_{k+2}, \ldots, A_n$ (dar nu intersectează în puncte interioare segmentele care au pe A_{n+1} sau A_k drept extremități). Numărul acestor segmente este $(k-1)(n-k)$, iar punctele în care este împărțit $A_{n+1}A_k$ sînt în același număr sau mai puține; ultimul caz se ivește atunci cînd unele dintre aceste puncte coincid. Numărul părților în care este împărțit acest segment se obține mărind numărul punctelor de diviziune cu 1. Astfel, prin ducerea segmentului $A_{n+1}A_k$ numărul de regiuni se mărește cel mult cu $1 + (k-1)(n-k)$. Această evaluare nu depinde de faptul că din punctul A_{n+1} mai sînt duse sau nu alte segmente. După ducerea tuturor segmentelor $A_{n+1}A_1, A_{n+1}A_2, \ldots, A_{n+1}A_n$ numărul regiunilor nu va depăși pe $u_n + \sum_{k=1}^{n} [1 + (k-1)(n-k)] = u_n + n + n\sum_{k=1}^{n}(k-1) - \sum_{k=1}^{n} k(k-1)$. Se demonstrează cu ușurință, prin inducție matematică, formula

$$\sum_{k=1}^{n} (k-1)(k-2)\ldots(k-s) = \frac{1}{s+1} n(n-1)\ldots(n-s).$$

Se obține astfel, prin transformări succesive,

$$u_{n+1} \leqslant u_n + n + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}.$$

Însumînd aceste inegalităţi şi ţinînd seama că $u_1 = 1$, rezultă

$$u_n \leqslant 1 + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}.$$

Dacă oricare trei segmente din mulţimea Z_n nu sînt concurente în acelaşi punct, toate punctele de diviziune al căror număr s-a calculat sînt distincte, obţinîndu-se egalitatea

$$\max u_n = 1 + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}.$$

Rămîne de arătat că poate fi găsită o astfel de mulţime Z_n, ceea ce se va demonstra prin inducţie.

Fie punctele $A_1, A_2, \ldots, A_n$ alese în modul arătat. Se uneşte prin drepte fiecare punct în care se intersectează segmentele din Z_n cu toate punctele $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Punctele în care aceste drepte intersectează cercul a doua oară se notează respectiv cu $B_1, B_2, \ldots$ $\ldots, B_m$. Numărul m al acestora nu depăşeşte evident $n \cdot C_n^2$ (acesta poate fi exprimat prin u_n, însă nu este necesar). Este evident că dacă se alege drept A_{n+1} orice punct al cercului, diferit de $B_1, B_2, \ldots$ $\ldots, B_m$, segmentele $A_{n+1}A_k$ nu vor trece prin punctele de intersecţie ale segmentelor din Z_n, ceea ce înseamnă că nici în mulţimea Z_{n+1} nu există trei segmente concurente în acelaşi punct.

130. Fie K punctul de intersecţie al tangentelor la cerc în punctele C şi D (punctul K există deoarece punctele C şi D nu sînt diametral opuse), iar N punctul de intersecţie al dreptelor AC şi BD. Diferitele poziţii reciproce ale punctelor C şi D faţă de AB sînt date în fig. 61. Totuşi rezolvarea care urmează nu depinde de poziţia punctelor C şi D.

Fie triunghiul ABN, care are pe AC şi BD înălţimi, deci L este ortocentru şi în consecinţă LN este de asemenea înălţime, adică $LN \perp AB$.

Se va demonstra că punctul K este mijlocul segmentului LN. Fie K_1 punctul de intersecţie al dreptei LN cu tangenta la cerc în C, notată cu m. Pentru a arăta că punctul K_1 coincide cu K se consideră triunghiurile dreptunghice ABC şi NCL, formate prin intersectarea perechii de drepte perpendiculare AC şi BC cu dreptele AB şi NL.

Deoarece $AC \perp BC$, unghiurile drepte NCL şi ACB sînt neapărat adiacente.

$\sphericalangle CAB = \sphericalangle LNC = \alpha$ iar $\sphericalangle CBA = \sphericalangle NLC = \beta$ fiindcă sînt unghiuri ascuţite cu laturile perpendiculare. Tangenta m este exterioară triunghiului ABC formînd cu laturile sale CA şi CB unghiuri

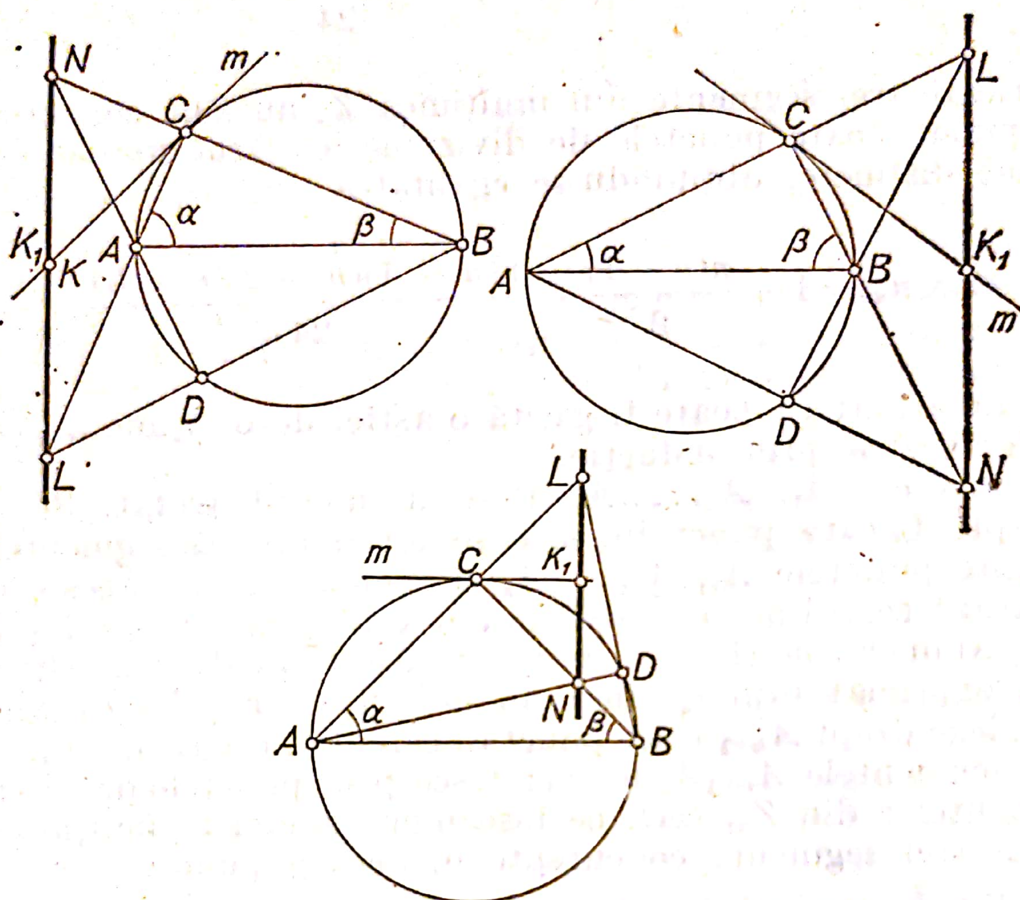


Fig. 61

ascuţite de mărime β, respectiv α. De aceea tangenta traversează triunghiul adiacent NCL.

$\sphericalangle K_1CN$ este format de BC şi m şi este ascuţit.

Prin urmare, $\sphericalangle K_1CN = \alpha$, iar $\sphericalangle K_1CL = \beta$ şi ΔNK_1C şi ΔLK_1C sînt isoscele, deci $K_1N = K_1C = K_1L$. Astfel tangenta m trece prin mijlocul K_1 al segmentului LN. În mod analog, tangenta la cerc în punctul D trece la rîndul său prin K_1, deci $K = K_1$.

131. a) Mijlocul T al segmentului KY (fig. 62) aparţine evident cercului care se obţine din cercul K prin omotetia H_y de centru Y şi raport 1/2. Cercul K_y are centrul în punctul S_y care este mijlocul segmentului SY, raza sa fiind 1/2. Se va studia mulţimea tuturor

punctelor S_y, cînd Y parcurge domeniul Q. Aceste puncte umplu transformatul Q' al pătratului Q prin omotetia H_0 de centru S și raport $\frac{1}{2}$. Prin urmare, figura Q' este un pătrat cu centrul în M', mijlocul segmentului SM, avînd latura de lungime 1, iar latu-

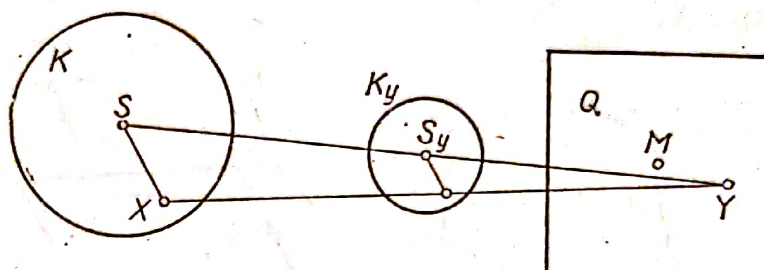


Fig. 62

rile pătratului Q' sînt paralele cu laturile corespunzătoare ale pătratului Q. Cercurile K_y umplu figura U.

b) Se consideră punctul Y fix. Punctul Z se obține din punctul T printr-o rotație de 45° în jurul lui Y (în sens direct sau invers urmată de o omotetie de centru Y și raport $\sqrt{2}$; prin aceste transformări cercul K_y căruia îi aparținea punctul T devine cercul K'_y de rază $\frac{\sqrt{2}}{2}$; centrul său S'_y se obține ca transformat al centrului S_y prin produsul de transformări descris anterior. De aceea punctul S'_y este vîrful triunghiului dreptunghic isoscel SYS' avînd ipotenuza SY. În consecință, punctul S'_y poate fi obținut ca transformat al punctului S_y prin aplicarea succesivă a două transformări: rotirea cu 45° în jurul punctului S (în sens direct sau retrograd) și omotetia de centru S și raport $\sqrt{2}$. Prin acest produs de transformări mulțimea punctelor S_y, adică pătratul Q' are ca imagine două pătrate Q_1 și Q_2 cu laturi de lungime $\sqrt{2}$. Cercurile K'_y umplu în acest caz figurile U_1 și U_2. Fiecare dintre acestea este imagine a figurii U la o rotație de 45° (în sens direct sau invers în jurul punctului S, urmată de o omotetie de centru S și raport $\sqrt{2}$. Figurile U_1 și U_2 sînt descrise în fig. 63. Punctele Z umplu deci figurile U_1 și U_2.

132. a) Ducînd $BB_1 \| AA'$ și $A'B_1 \| AB$ (fig. 64), se obține paralelogramul $AA'B_1B$. Dreapta paralelă cu AB și trecînd prin punctul M intersectează dreapta BB_1 în punctul N_1. Se obține

$$\frac{AM}{MA'} = \frac{BN_1}{N_1B_1}.$$

Prin punctul N_1 se duce o dreaptă paralelă cu B_1B', care intersectează pe BB' în punctul N_2. Din triunghiul BB_1B' rezultă că $\frac{BN_1}{N_1B_1} = \frac{BN_2}{B'N_2}$, deci $\frac{BN_2}{B'N_2} = \frac{AM}{MA'}$, ceea ce înseamnă că punctul N_2 coincide cu punctul N.

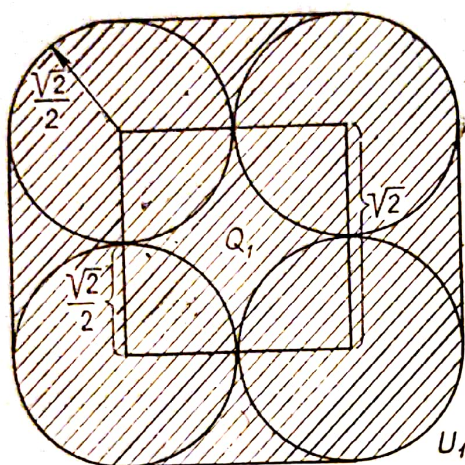


Fig. 63

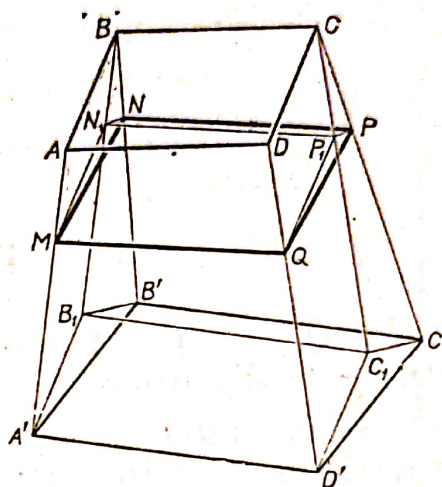


Fig. 64

În mod analog se construiește paralelogramul $DD'C_1C$ și punctul P_1 pe CC_1. Dacă se duce $P_1P_2 \parallel C_1C'$, rezultă că

$$\frac{DQ}{QD'} = \frac{CP_1}{P_1C_1} = \frac{CP_2}{P_2C'}$$

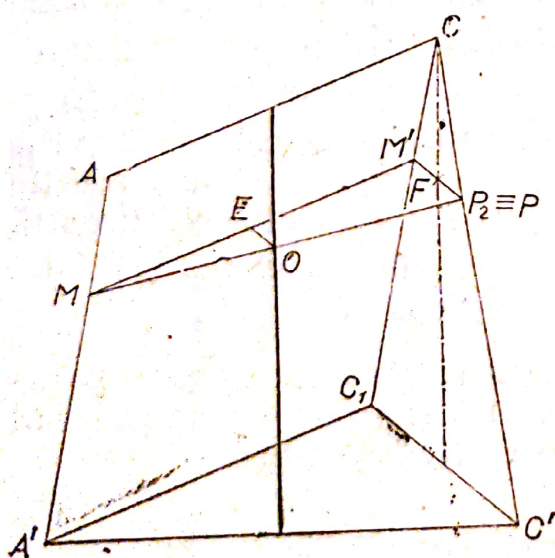


Fig. 65

(punctul P_2 coincide astfel cu P), însă $A'B_1C_1D'$ este paralelogram deoarece $A'B_1 = AB = DC = D'C_1$ și $A'B_1 \parallel AB$, $DC \parallel D'C_1$. Rezultă deci că $A'D' = B_1C_1$, $A'D' \parallel B_1C_1$ și, prin urmare, $B_1C_1 \parallel B'C'$ și $B_1C_1 = B'C'$. Atunci $N_1N = P_1P$ și $N_1N \parallel P_1P$, în consecință patrulaterele N_1NPP_1 și $MNPQ$ sînt paralelograme.

b) Cea de-a doua parte, evident, se reduce la găsirea locului geometric al mijloacelor segmentelor MP. Punctul C_1 (fig. 65) este ales de această dată astfel încît patrulaterul $AA'C_1C$

să fie paralelogram. Paralela la AC care trece prin punctul M intersectează pe CC_1 în punctul M', iar paralela la dreapta C_1C' care trece prin punctul M' intersectează pe CC' în punctul P_2. Se găsește astfel:

$$\frac{AM}{MA'} = \frac{CM'}{M'C_1} = \frac{CP_2}{P_2C'}.$$

Din această cauză punctul P_2 coincide cu P.

Fie E mijlocul segmentului MM', F mijlocul segmentului $M'P$ și O mijlocul segmentului MP. Evident că $EO = M'F$, $EO \parallel M'F$, deci punctul O descrie o dreaptă paralelă cu mediana din vîrful C al triunghiului CC_1C'; această dreaptă trece prin mijlocul lui AC și prin mijlocul lui $A'C'$.

133. Se observă că $p \neq 0$ și că, dacă x_0 este o rădăcină a ecuației, $\sin x_0 \cos x_0 \neq 0$. Dacă se înmulțesc ambii membri ai ecuației cu $p \sin x \cos x$, se obține $p(\sin x + \cos x) = \sin x \cos x$; cu ajutorul substituției $x = \frac{\pi}{4} + y$, aceasta se scrie

$$p\left[\sin\left(\frac{\pi}{4} + y\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} + y\right)\right] = \sin\left(\frac{\pi}{4} + y\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} + y\right).$$

Avînd în vedere că

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + y\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} + y\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + y\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4} - y\right) =$$

$$= 2\sin\frac{\left(\frac{\pi}{4} + y\right) + \left(\frac{\pi}{4} - y\right)}{2}\cos\frac{\left(\frac{\pi}{4} + y\right) - \left(\frac{\pi}{4} - y\right)}{2} =$$

$$= 2\sin\frac{\pi}{4}\cos y = \sqrt{2}\cos y,$$

iar

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + y\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} + y\right) = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2y\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2y\right) = \frac{1}{2}\cos 2y = \frac{1}{2}(\cos^2 y - \sin^2 y) =$$

$$= \frac{1}{2}[\cos^2 y - (1 - \cos^2 y)] = \frac{1}{2}(2\cos^2 y - 1).$$

Ecuaţia $p(\sin x + \cos x) = \sin x \cos x$ se transformă, prin substituţia $z = \cos y$ în ecuaţia echivalentă $\sqrt{2}\, pz = \frac{1}{2}(2z^2 - 1)$ sau $2z^2 - 2\sqrt{2}pz - 1 = 0$, care are rădăcinile

$$z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(p + \sqrt{p^2+1}),\quad z_2 = \frac{1}{2}(p - \sqrt{p^2+1}).$$

Este evident că pentru orice valoare reală a lui p,

$$z_1 > 0 > z_2.$$

Deoarece este necesar ca $z_1 \leqslant 1$, $z_2 \geqslant -1$, parametrul p trebuie să satisfacă dubla inegalitate

$$-\frac{1}{2\sqrt{2}} \leqslant p \leqslant \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Se observă uşor că pentru valorile lui p care satisfac această condiţie, rădăcinile z_1 şi z_2 ale ecuaţiei $2z^2 - 2\sqrt{2}pz - 1 = 0$ sînt distincte. Se găsesc astfel pentru y $(0 \leqslant y < 2\pi)$ următoarele patru valori:

$$y_1 = \arccos z_1,\ y_2 = 2\pi - \arccos z_1,\ y_3 = \arccos z_2,\ y_4 = 2\pi - \arccos z_2,$$

care sînt diferite între ele, cu excepţia cazului $p = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$, cînd numai două dintre ele sînt diferite. Aceasta se întîmplă pentru orice interval de forma $[2k\pi, 2(k+1)\pi)$ la care aparţine y. Folosind substituţia $x = y + \frac{\pi}{4}$, se obţin expresiile lui x. Studiul existenţei şi al numărului rădăcinilor a fost deja făcut.

134. Se cunoaşte că lungimea razei cercului exînscris în triunghi, tangent la latura sa de lungime a, este

$$r_a = \frac{s}{p-a},$$

s fiind aria, iar p semiperimetrul triunghiului (a se compara cu formula pentru lungimea razei cercului înscris în triunghi). În mod analog:

$$r_b = \frac{s}{p-b} \text{ şi } r_c = \frac{s}{p-c}.$$

Înmulţind aceste egalităţi două cîte două şi folosind formula lui Heron, se găseşte

$$r_a r_b = p(p-c),\ r_b r_c = p(p-a),\ r_c r_a = p(p-b).$$

Prin adunarea membru cu membru a ultimelor egalităţi, se obţine

$$r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a = p^2.$$

Deoarece $r_b r_c = p(p-a)$, rezultă $a = \frac{1}{p}(p^2 - r_b r_c) = \frac{r_a(r_b + r_c)}{\sqrt{r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a}}$. Latura a poate fi construită pe baza acestei egalităţi. În mod analog pot fi construite laturile b şi c, iar cu ajutorul acestor laturi însuşi triunghiul. Se observă că oricare ar fi razele cercurilor exînscrise, construcţia poate fi realizată în mod unic.

Observaţie. Problema poate fi rezolvată mai simplu folosind asemănarea. Rezolvarea precedentă are însă avantajul că se obţine cu ajutorul ei condiţia posibilităţii construcţiei cerute.

135. Se observă uşor că acel corp convex care intervine în enunţ poate avea numai forma reprezentată de fig. 66. Planele dreptunghiurilor egale vor fi considerate drept plane de coordonate, iar lungimile laturilor acestor dreptunghiuri se vor nota cu $2a$, respectiv cu $2b$ $(a \geqslant b)$.

a) Din simetria corpului rezultă că volumul părţii corpului, care se găseşte în primul octant (de coordonate pozitive) este $\frac{1}{8}$ din volumul întregului corp. Însă

$$V_{OABCDEF} = V_{OBDF} + V_{FABO} + V_{BCDO} + V_{DEFO}.$$

Corpul $OBDF$ este o piramidă triunghiulară regulată, cu muchia bazei $BD = DF = FB = \sqrt{2(a^2 - ab + b^2)}$, iar muchiile laterale $OB = OD = OF = \sqrt{a^2 - b^2}$.

Se calculează uşor că volumul acestei piramide este

$$V_1 = \frac{1}{6}(a^3 + b^3),$$

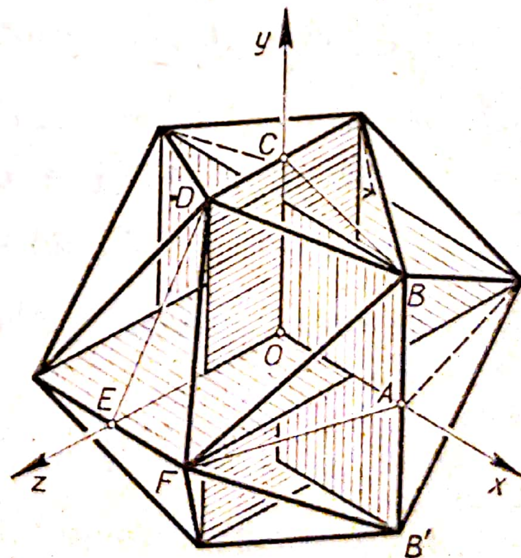


Fig. 66

iar volumul piramidei triunghiulare $FABO$

$$V_2 = \frac{1}{6} a^2 b.$$

Rezultate analoage se obţin calculînd volumele piramidelor triunghiulare $BCDO$ şi $DEFO$. În acest fel, volumul întregului corp

$$V = 8(V_1 + 3V_2) = \frac{4}{3}(a^3 + 3a^2 b + b^3).$$

b) Condiţia necesară şi suficientă pentru ca poliedrul despre care este vorba să fie regulat este ca muchiile sale să aibă aceeaşi lungime, de exemplu $BD = BB'$, altfel spus

$$\sqrt{2(a^2 - ab + b^2)} = 2b,$$

ceea ce atrage după sine

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1).$$

Aceasta înseamnă că latura mai mică a dreptunghiurilor trebuie să aibă aceeaşi lungime cu cel mai lung dintre segmentele în care se descompune latura mai lungă a dreptunghiurilor cînd se împarte în raportul „de aur“ *.

Observaţie. Dacă $\frac{b}{a} = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$, $a = \frac{b}{2}(\sqrt{5}+1)$, înlocuind acest rezultat în formula obţinută pentru V, se obţine

$$V' = \frac{10}{3}(3 + \sqrt{5})\, b^3,$$

ceea ce reprezintă volumul icosaedrului regulat de muchie $2b$.

136. Se notează cu x şi y raza bazei conului, respectiv generatoarea acestuia. Volumul şi aria conului vor fi $V = \frac{1}{3}\pi x^2 \sqrt{y^2 - x^2}$ şi $S = \pi xy$. Înlocuind valorile lui V şi S în inegalitatea iniţială, se găseşte

$$4(x^4 y^2 - x^6) \leqslant \frac{8}{(\sqrt{3})^3} x^3 y^3,$$

* Un segment este împărţit în raportul „de aur" dacă se găseşte pe el un punct astfel ca unul din cele două segmente astfel obţinute să fie medie geometrică între segmentul iniţial şi celălalt segment (*N.T.*).

relaţie care devine, după împărţirea ambilor membri cu numărul pozitiv $4x^3y^3$,

$$\frac{x}{y} - \left(\frac{x}{y}\right)^3 \leqslant \frac{2}{(\sqrt{3})^3} \quad \text{sau} \quad \left(\frac{x}{y}\right)^3 - \frac{x}{y} + \frac{3}{(\sqrt{3})^3} - \frac{1}{(\sqrt{3})^3} \geqslant 0. \quad (1)$$

Deoarece $\frac{x}{y} < 1$, se poate nota $\frac{x}{y} = \cos\varphi$, unghiul $\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ fiind format de generatoare cu raza bazei conului; inegalitatea (1) ia astfel forma

$$\cos^3\varphi - \frac{1}{(\sqrt{3})^3} - \cos\varphi + \frac{1}{\sqrt{3}} \geqslant 0$$

sau

$$\left(\cos\varphi - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(\cos^2\varphi + \frac{1}{\sqrt{3}}\cos\varphi - \frac{2}{3}\right) \geqslant 0.$$

Deoarece

$$\cos^2\varphi + \frac{1}{\sqrt{3}}\cos\varphi - \frac{2}{3} = \left(\cos\varphi - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(\cos\varphi + \frac{2}{\sqrt{3}}\right),$$

se obţine

$$\left(\cos\varphi - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\left(\cos\varphi + \frac{2}{\sqrt{3}}\right) \geqslant 0. \quad (2)$$

În inegalitatea (2) primul factor este totdeauna nenegativ, iar al doilea, pentru $\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ este tot timpul pozitiv. Parcurgînd în ordine inversă operaţiile făcute, se obţine inegalitatea iniţială. În (2) se obţine egalitatea în cazul cînd $\cos\varphi = \frac{x}{y} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

137. Fie $ABCD$ şi $A'B'C'D'$ cele două poligoane date P şi P', în care

$AB = DC = b$, $AD = BC = a$, $A'B' = D'C' = a'$, $A'D' = B'C' = b'$, $b' \leqslant AC$. Se construieşte paralelogramul $A_1B_1C_1D_1$ notat cu P_1, de laturi a şi b', echivalent cu P', în modul următor (fig. 67). Se notează $A_1 = A'$, $D_1 = D'$ şi ducîndu-se un cerc cu centrul în punctul A' şi de rază a, se obţine punctul B_1 ca intersecţie a acestui cerc cu

segmentul $B'C'$ (aceasta este posibil deoarece $a' \leqslant a \leqslant b' < A'C'$). Se construiește, în fine, punctul C_1 astfel ca $A_1B_1C_1D_1$ să fie paralelogram. Este evident că paralelogramul P' poate fi descompus în două părți din care se poate alcătui paralelogramul P_1.

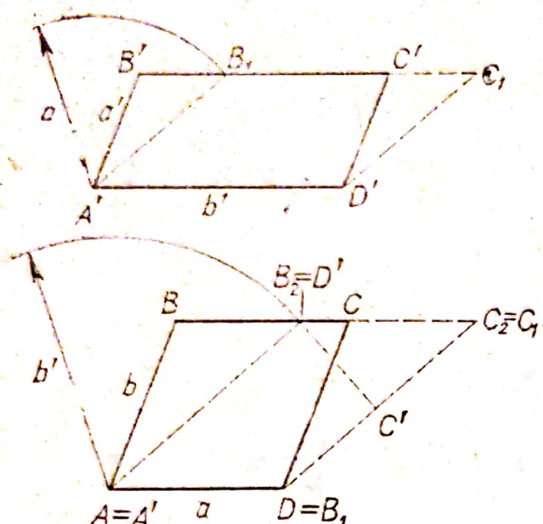


Fig. 67

În mod analog se construiește în continuare paralelogramul $A_2B_2C_2D_2$ notat cu P_2, de laturi a și b', care poate fi descompus în două părți care îl pot alcătui pe P. Se notează în acest scop $A_2 = A$, $D_2 = D$, descriindu-se apoi un cerc cu centrul în punctul A și de rază b'. Punctul B_2 se găsește la intersecția acestui cerc cu segmentul BC (aceasta este posibil deoarece $b \leqslant b' \leqslant AC$). Se construiește, în fine, punctul C_2 astfel ca $A_2B_2C_2D_2$ să fie paralelogram. Este evident că P poate fi descompus în două părți din care se poate forma P_2.

Fiindcă prin construcție paralelogramele P_1 și P_2 sînt echivalente cu P' și P și au laturile a și b', înseamnă că P_1 și P_2 sînt egale. S-a demonstrat astfel că paralelogramul P' poate fi descompus în patru părți, din care se poate forma paralelogramul P.

138. a) I. Fie două și numai două unghiuri drepte cu vîrful în A și situate în planul fețelor și anume $\sphericalangle CAD = \sphericalangle BAD = 90°$ (fig. 68).

1) Fie fața ABC cel de-al treilea triunghi dreptunghic. Prin ipoteză $\sphericalangle BAC \neq 90°$. Din motive de simetrie nu contează care din celelalte unghiuri ale feței ABC este drept. Dacă se consideră că acesta este $\sphericalangle ACB$, se obține

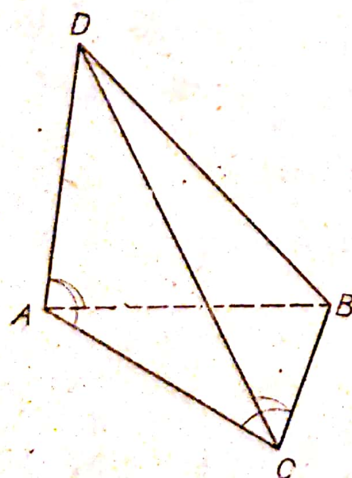


Fig. 68

$$BC^2 + CD^2 = BC^2 + AC^2 + AD^2 =$$

$$= AB^2 + AD^2 = DB^2,$$

adică $\sphericalangle BCD = 90°$.

2) Fie fața BCD cel de-al treilea triunghi dreptunghic. Dacă se presupune că $\sphericalangle BDC = 90°$, se constată ușor că triunghiul ABC



este obtuz. (De exemplu, astfel : $BC^2 = CD^2 + DB^2 = DA^2 + AC^2 + AB^2 + DA^2 > AC^2 + AB^2$.) Din condiţiile puse rezultă că aceasta nu este posibil.

Din motive de simetrie, este indiferent care din celelalte două unghiuri este drept. Fie acesta $\sphericalangle BCD$, deci

$$BC^2 + AC^2 = BD^2 - DC^2 + AC^2 = BD^2 - (DC^2 - AC^2) =$$

$$= BD^2 - AD^2 = AB^2,$$

adică $\sphericalangle ACB = 90°$.

II. Se consideră că în nici un vîrf al tetraedrului $ABCD$ nu se îndeplineşte condiţia ca două şi numai două dintre unghiurile feţelor să fie drepte.

1) Dacă trei feţe ale tetraedrului sînt triunghiuri dreptunghice cu vîrful drept comun, cea de-a patra faţă este triunghi ascuţitunghic. Se stabileşte, într-adevăr, cu uşurinţă, că pătratul oricărei laturi a celei de-a patra feţe este mai mic decît suma pătratelor celorlalte două laturi.

2) Fie trei dintre feţele tetraedrului triunghiuri dreptunghice avînd vîrful drept necomun două cîte două. Se constată uşor că poziţia reciprocă a feţelor în acest caz conduce la trei cazuri distincte : δ_1), δ_2) şi δ_3), descrise în fig. 69.

Dacă se admite posibilitatea cazului δ_3), se găseşte că orice muchie a tetraedrului este catetă a unui triunghi dreptunghic şi de aceea este mai mică decît oricare altă muchie a tetraedrului, ceea ce nu este posibil, dacă se are în vedere că printre acestea se găseşte una (sau mai multe) muchii de lungime maximă.

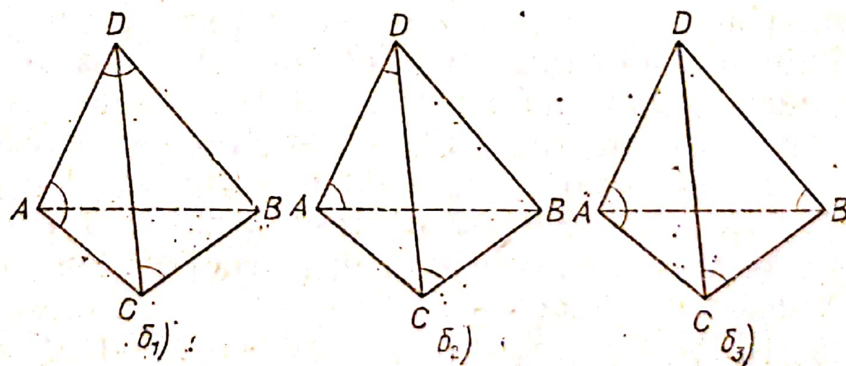


Fig. 69

Rămîn de studiat două cazuri :

δ_1) $\sphericalangle CAD = \sphericalangle BCD = \sphericalangle BDA = 90°$;

δ_2) $\sphericalangle ADC = \sphericalangle BCD = \sphericalangle BAD = 90°$.

Se consideră fața ABC. Conform ipotezei $\sphericalangle BAC \neq 90°$ și $\sphericalangle ACB \neq 90°$. Se presupune că $\sphericalangle ABC = 90°$.
În cazul c_1) se obține

$$AC < CD < DB < AB < AC,$$

ceea ce nu este posibil.
În cazul δ_2) se găsește că centrul sferei circumscrise tetraedrului $ABCD$ trebuie să coincidă cu mijloacele muchiilor AC și BD, muchii care nu au puncte comune. Rezultă că triunghiul ABC nu este dreptunghic.
b) Fie în tetraedrul $ABCD$ (fig. 68)

$$\sphericalangle ACB = \sphericalangle CAD = \sphericalangle BAD = \sphericalangle BCD = 90°.$$

Volumul tetraedrului se va exprima, evident, prin formula

$$V = \frac{1}{6} AC \cdot BC \cdot AD.$$

În continuare, este clar că cel puțin unul din segmentele AC, BC și AD este mai scurt decît celelalte muchii ale tetraedrului. Dacă cel de-al treilea din aceste segmente nu este mai scurt decît celelalte trei muchii, este satisfăcută una din inegalitățile $AB < AD$ sau $CD < BC$. Dacă se înlocuiește cel de-al treilea din aceste segmente cu cea mai scurtă dintre celelalte muchii, noul triplet de segmente va fi situat în același plan. În consecință AC, BC și AD sînt cele mai scurte muchii care nu sînt situate pe aceeași față.

139. Se vor lăsa la o parte persoanele care nu au nici un cunoscut în sală (și din această cauză ele însele nu sînt cunoscute de nimeni dintre cei prezenți). Dacă numărul lor ar fi mai mare sau egal cu doi, teorema ar fi demonstrată. Fie k numărul persoanelor care au cel puțin o cunoștință în sală. Este evident că numărul $k \geqslant 2$, fiecare putînd avea $1, 2, \ldots, k-1$ cunoscuți, însă deoarece în sală se găsesc în total k astfel de persoane, este evident că cel puțin una din acestea are același număr de cunoscuți.

140. a) Pentru $k = 1$ inegalitatea (1) este evident îndeplinită. Pentru cazul general aceasta va fi demonstrată prin inducție. Astfel

$$N = (a_1 + a_2 + \ldots + a_k + a_{k+1})^2 = (a_1 + a_2 + \ldots + a_k)^2 +$$
$$+ a_{k+1}^2 + 2a_{k+1}(a_1 + a_2 + \ldots + a_k).$$

Aplicînd inegalitatea (1) primului termen din partea dreaptă a egalității de mai sus, se obține

$$N \leqslant k(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_k^2) + a_{k+1}^2 + 2a_{k+1}(a_1 + a_2 + \ldots + a_k) =$$
$$= (k+1)(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_k^2 + a_{k+1}^2) - a_1^2 - a_2^2 - \ldots - a_k^2 -$$
$$- ka_{k+1}^2 + 2a_1a_{k+1} + \ldots + 2a_ka_{k+1} = (k+1)(a_1^2 + a_2^2 + \ldots$$
$$\ldots + a_{k+1}^2) - (a_1 - a_{k+1})^2 - (a_2 - a_{k+1})^2 - \ldots - (a_k - a_{k+1})^2.$$

Se deduce imediat (1) pentru

$$N \leqslant (k+1)(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{k+1}^2).$$

b) Propoziția, evident, are loc pentru $k = 1$. Pentru $k = n - 1$, (1) are drept consecință:

$$|a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}| \leqslant \sqrt{(n-1)(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{n-1}^2)} \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{(n-1)(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)}.$$

Ținînd seama de (2), se obține

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} \leqslant |a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}| \leqslant a_1 + a_2 + \ldots + a_n,$$

negalitate din care rezultă $a_n \geqslant 0$. Schimbînd numerotarea numerelor, oricare din acestea se poate nota cu a_n și se poate arăta că este nenegativ. Propoziția este demonstrată.

141. Se notează mărimile unghiurilor din vîrfurile A, B, C ale triunghiului ABC cu α, β și γ. Se găsește astfel că

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{SA}, \quad \sin\frac{\beta}{2} = \frac{1}{SB}, \quad \sin\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{SC} \qquad (1)$$

și, deoarece

$$SA \leqslant SB \leqslant SC, \qquad (*)$$

are loc dubla inegalitate

$$\sin\frac{\alpha}{2} \geqslant \sin\frac{\beta}{2} \geqslant \sin\frac{\gamma}{2}, \qquad (2)$$

Unghiurile $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\beta}{2}$, $\frac{\gamma}{2}$ fiind ascuțite, din (2) rezultă că

$$90° > \frac{\alpha}{2} \geqslant \frac{\beta}{2} \geqslant \frac{\gamma}{2} > 0°,$$

adică

$$180° > \alpha \geqslant \beta \geqslant \gamma > 0°. \qquad (3)$$

Folosind egalitatea $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ și inegalitatea (3), se obține $\alpha + \beta + \gamma \leqslant 3\alpha$, $\alpha + \beta + \gamma \geqslant 3\gamma$, $180° \leqslant 3\alpha$, $180° \geqslant 3\gamma$, adică

$$60° \leqslant \alpha, \quad 60° \geqslant \gamma. \tag{4}$$

Rezultă că $\frac{\alpha}{2} \geqslant 30°$ și din (1) se deduce că

$$SA = \frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}} \leqslant \frac{1}{\sin 30°} = 2. \tag{5}$$

I. Toate vîrfurile A sînt situate pe cercuri cu centrul în S și raza mai mare decît 1 și mai mică sau egală cu 2 (fig. 70). Din (4) se deduce că $\frac{\gamma}{2} \leqslant 30°$, iar din (1) că

$$SC = \frac{1}{\sin\frac{\gamma}{2}} \geqslant \frac{1}{\sin 30°} = 2. \tag{6}$$

II. Toate vîrfurile C sînt situate pe cercuri cu centrul în S și avînd razele mai mari sau egale cu 2. Pentru unghiul β se obține inegalitatea $0° < \beta < 90°$, adică $0° < \frac{\beta}{2} < 45°$. Se obține în acest caz din (2):

$$SB = \frac{1}{\sin\frac{\beta}{2}} > \frac{1}{\sin 45°} = \sqrt{2}. \tag{7}$$

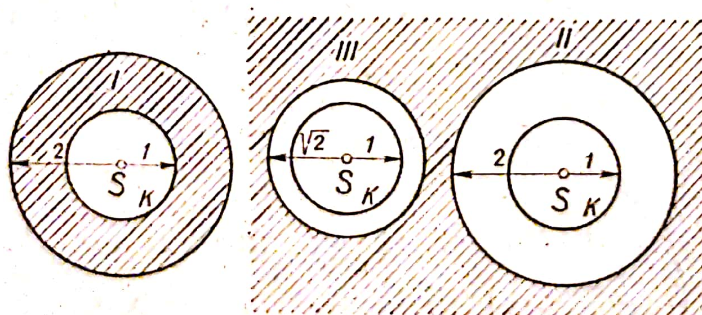


Fig. 70

III. Toate vîrfurile B se găsesc pe cercuri cu centrul în S, raza cărora este mai mare decît $\sqrt{2}$.

În toate trei cazurile studiate este adevărată și reciproca.

Dacă lungimea segmentului SA (SC, SB) satisface inegalitatea (5) [respectiv (6) sau (7)], punctul respectiv A (C, B) este vîrf al unui triunghi ABC pentru care se îndeplinește relația (*).

142. Fie $x, x+1, \ldots, x+k$ cele $k+1$ numere întregi care se cer. Ecuația problemei este

$$x + (x+1) + \ldots + (x+k) = N \quad \text{sau} \quad \frac{(x+x+k)(k+1)}{2} = N.$$

Se deduce că

$$x = \frac{N}{k+1} - \frac{k}{2}. \qquad (1)$$

a) Întrucît $N = 550 = 2^2 \cdot 5^3$, relația (1) conduce la considerarea următoarelor două cazuri.

În cazul cînd k este par, pentru ca x să fie întreg, $k+1$ trebuie să fie egal cu 1, 5, 5^2 sau 5^3. Astfel,

$k_1 + 1 = 1$, $x_1 = 500$, $\div$ 500;

$k_2 + 1 = 5$, $x_2 = 98$, $\div$ 98, 99, 100, 101, 102;

$k_3 + 1 = 5^2$, $x_3 = 8$, $\div$ 8, 9, 10, ..., 31, 32;

$k_4 + 1 = 5^3$, $x_4 = -58$, $\div$ $-58, -57, \ldots, 65, 66$.

În cazul cînd k este impar, pentru ca x să fie întreg, fracția $\frac{500}{k+1}$ trebuie să fie egală cu $m + \frac{1}{2}$ ($m \in Z$). În consecință, $k+1$ trebuie să fie produs al factorului 2^3 cu 1, 5, 5^2 sau 5^3. Se obțin:

$k_5 + 1 = 2^3$, $x_5 = 59$, $\div$ 59, 60, ..., 65, 66;

$k_6 + 1 = 2^3 \cdot 5$ $x_6 = -7$, $\div$ $-7, -6, \ldots, 31, 32$;

$k_7 + 1 = 2^3 \cdot 5^2$ $x_7 = -97$, $\div$ $-97, -96, \ldots, 101, 102$;

$k_8 + 1 = 2^3 \cdot 5^3$, $x_8 = -499$, $\div$ $-499, -498, \ldots, 499, 500$.

b) Relația (1) se poate scrie

$$x = \frac{2^\alpha 3^\beta 5^\gamma}{k+1} - \frac{k}{2}.$$

Dacă numărul k este par, $k+1$ poate lua valorile impare 1, 3, $3^2, \ldots, 3^\beta$, $5 \cdot 1$, $5 \cdot 3$, ..., $5 \cdot 3^\beta$, $5^2 \cdot 1$, ..., $5^2 \cdot 3^\beta$, ..., $5^\gamma \cdot 1$, $5^\gamma \cdot 3$, ..., $5^\gamma \cdot 3^\beta$, adică $(\beta+1)(\gamma+1)$ valori.

Acesta este numărul sumelor căutate.

În cazul cînd k este impar, pentru ca x să fie întreg, $\frac{2^\alpha 3^\beta 5^\gamma}{k+1}$ trebuie să fie egal cu $m + \frac{1}{2}$.

Prin urmare, $k + 1$ poate lua valorile precedente, înmulţite fiecare cu $2^{\alpha+1}$, adică $(\beta + 1)(\gamma + 1)$ valori. Se obţin în final $2(\beta + 1)(\gamma + 1)$ sume. Exact jumătate din aceste sume vor fi compuse numai din numere naturale.

În fond, dacă din mulţimea de numere naturale $\{x, x + 1, \ldots$ $\ldots, x + k\}$, a căror sumă este egală cu N, iar $x \geqslant 1$, se poate obţine mulţimea de numere întregi $\{-x + 1, \ldots, 0, \ldots, x - 1, x, \ldots, x + k\}$, avînd aceeaşi sumă (cînd $x = 1$), se adaugă numai 0. Reciproc, dacă mulţimea începe cu un x negativ, $x = -y$ $(y > 0)$, atunci, întrucît $N \geqslant 1$, termenii pozitivi sînt mai mulţi şi

$$(-y) + (-y + 1) + \ldots + 0 + \ldots + y + (y + 1) + \ldots$$
$$\ldots + (y + k) = N = (y + 1) + \ldots + (y + k) = N.$$

Astfel, fiecărei mulţimi de numere naturale i se pune în corespondenţă numai o singură mulţime care începe cu un număr negativ sau cu zero. Prin urmare, numărul sumelor formate din numere naturale este $(\beta + 1)(\gamma + 1)$.

c) Dacă $N = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots m^\mu$, $a, b, c, \ldots, m$ fiind numere prime într-o succesiune crescătoare, iar $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \mu$ numere naturale, se consideră două cazuri.

1) $a = 2$. Prin raţionamente analoage celor de mai sus se stabileşte în acest caz că numărul mulţimilor căutate este $2(\beta + 1) \ldots$ $\ldots (\mu + 1)$.

2) $a > 2$, iar numărul N este impar. Se stabileşte, analog ca mai sus, că numărul mulţimilor căutate este $(\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1) \ldots$ $\ldots (\mu + 1)$.

143. a) Din formula binomului lui Newton se deduce, pentru numerele reale pozitive a şi b,

$$(a + b)^n > a^n + na^{n-1}b, \text{ deci } (n + 1)^n > 2 \cdot n^n.$$

Puterea a zecea a acestei inegalităţi se scrie

$$(n + 1)^{10n} > 2^{10} n^{10n} > 1000 \cdot n^{10n}.$$

Logaritmînd această inegalitate, se obține

$$\lg(n+1) > \frac{3}{10n} + \lg n.$$

b) Inegalitatea obținută se transcrie sub forma

$$\lg(k+1) > \frac{3}{10\,k} + \lg k.$$

Însumînd inegalitățile de acest tip de la $k = 1$ la $k = m - 1$ și avînd în vedere că $\lg 1 = 0$, iar termenii $\lg 2, \lg 3, \ldots, \lg(m-1)$ care se găsesc în ambii membri ai inegalității se reduc, se găsește că

$$\lg m > \frac{3}{10}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{m-1}\right).$$

Dacă se însumează inegalitățile de forma celei de mai sus de la $m = 2$ la $m = n$, se obține

$$\lg n\,! = \lg 2 + \lg 3 + \ldots + \lg n > \frac{3}{10}\left(\frac{n-1}{1} + \frac{n-2}{2} + \ldots\right.$$

$$\left.\ldots + \frac{n-(n-1)}{n-1}\right) = \frac{3}{10}\left[n\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n-1}\right) -\right.$$

$$\left.-(n-1)\right] > \frac{3n}{10}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1} - 1\right),$$

ceea ce trebuia demonstrat.

144. Membrul întîi al ecuației [care se notează cu $f(x)$] reprezintă diferite funcții algebrice pe intervalele $(-\infty, -2)$, $(-2, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, +\infty)$. Membrul întîi este dat de o funcție pară, strict pozitivă, $f(x) = f(-x) > 0$. Membrul al doilea este dat de o funcție impară. Aceasta ia valori de semne contrare pe cele două semiaxe, pozitivă și negativă, ale axei reale. De aceea, dacă $m \geqslant 0$, este suficient să se considere numai valorile pozitive ale lui x, studiindu-se problema pe intervalele $(0, 1)$, $(1, 2)$ și $(2, +\infty)$.

Reciproc, pentru $m = -t < 0$, nu există rădăcini ale ecuației situate pe semiaxa pozitivă, iar rădăcinile ecuației aflate pe semiaxa negativă sînt egale în modul și de semn contrar cu rădăcinile ecuației pentru $m = t > 0$.

Fie astfel $m \geqslant 0$. Pe intervalul $(0, 1)$ ecuația este $5 - 2x^2 = mx$, iar rădăcinile acesteia sînt $x_{1,2} = \frac{-m \pm \sqrt{m^2 + 40}}{4}$. O singură rădăcină din acestea este pozitivă, $x_1 = \frac{-m + \sqrt{m^2 + 40}}{4}$, care este acceptabilă dacă $x_1 < 1$, cînd $f(1) = 3 < m$, adică pentru $m > 3$.

Dacă $x = 1$, rezultă $m = 3$, deci $x = 1$ este rădăcină a ecuației pentru $m = 3$.

Pe intervalul $(1, 2)$ ecuația are forma $mx = 3$. Singura rădăcină a acestei ecuații este $x = \frac{3}{m}$. Rădăcina este acceptabilă dacă $1 < \frac{3}{m} < 2$ sau dacă $\frac{3}{2} < m < 3$.

Dacă $x = 2$, rezultă că $2m = 3$, deci $x = 2$ este rădăcină a ecuației pentru $m = \frac{3}{2}$.

Pe intervalul $(2, +\infty)$ ecuația ia forma $2x^2 - 5 = mx$, avînd rădăcinile $x_{1,2} = \frac{m \pm \sqrt{m^2 + 40}}{4}$. O singură rădăcină dintre acestea este pozitivă, $x_1 = \frac{m + \sqrt{m^2 + 40}}{4}$. Pentru ca $x_1 > 2$, $f(2) = 3 < 2m$, adică $m > \frac{3}{2}$.

a) Dacă m este pozitiv, ecuația admite rădăcini pentru $m \geqslant \frac{3}{2}$. Pentru $m = \frac{3}{2}$ există o singură rădăcină: $x = 2$, iar pentru $m > \frac{3}{2}$ ecuația are două rădăcini: $0 < x_1 < 2$ și $x_2 > 2$. Dacă m este negativ, se obține întru totul analog că pentru $m \geqslant -\frac{3}{2}$ nu există rădăcini, pentru $m = -\frac{3}{2}$ rădăcina este unică: $x = -2$, iar pentru $m < -\frac{3}{2}$ ecuația are două rădăcini: $0 > x_1 > -2$ și $x_2 < -2$.

b) Rădăcina $x = 1$ se obține pentru $m = 3$, găsindu-se astfel perechile $(1, 3)$ și $(-1, -3)$.

Rădăcinii $x = 2$ îi corespunde valoarea fracționară $m = \frac{3}{2}$.

În continuare trebuie verificate numerele întregi x mai mari ca 2. Acestea trebuie să fie rădăcini ale ecuației $2x^2 - 5 = mx$. Rezultă că $5 = x(2x - m)$, ambii factori x și $2x - m$ fiind întregi. Deoarece $x > 0$, binomul $2x - m$ este de asemenea pozitiv. Numărul 5 este însă prim și se scrie numai în două moduri ca produs de factori pozitivi: $5 = 1 \cdot 5 = 5 \cdot 1$.

Prima descompunere conduce la $x = 1$, ceea ce nu convine, fiindcă s-au considerat valori $x > 2$.

Cea de-a doua descompunere implică $x = 5$ și, în consecință, $m = 9$. Se obțin pe această cale încă două perechi: (5, 9) și (– 5, – 9). Nu există alte perechi de numere întregi (x, m).

145. Din enunț se deduce că $\alpha = \alpha_1 (\alpha = \hat{A},\ \alpha_1 = \hat{A}_1)$ și

$$\frac{a + c}{b} = \frac{a_1 + c_1}{b_1} = 2. \qquad (1)$$

Din teorema sinusurilor se deduce ușor formula:

$$\frac{a + c}{b} = \frac{\cos \frac{\alpha - \gamma}{2}}{\cos \frac{\alpha + \gamma}{2}} \qquad (\gamma = \hat{C},\ \gamma_1 = \hat{C}_1).$$

Folosind această formulă, se găsește din (1):

$$\frac{\cos \frac{\alpha - \gamma}{2}}{\cos \frac{\alpha + \gamma}{2}} = \frac{\cos \frac{\alpha_1 - \gamma_1}{2}}{\cos \frac{\alpha_1 + \gamma_1}{2}}, \qquad (2)$$

relație din care rezultă imediat

$$\frac{1 + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}} = \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{\alpha_1}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma_1}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{\alpha_1}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma_1}{2}}.$$

Aducînd egalitatea obținută la o formă mai simplă, se găsește

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \operatorname{tg} \frac{\alpha_1}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma_1}{2}$$

și fiindcă $\alpha = \alpha_1$ înseamnă că $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \operatorname{tg} \frac{\alpha_1}{2}$, deci $\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \operatorname{tg} \frac{\gamma_1}{2}$.

Deoarece γ şi γ_1 sînt unghiuri ale triunghiului, $0 < \frac{\gamma}{2} < \frac{\pi}{2}$ şi $0 < \frac{\gamma_1}{2} < \frac{\pi}{2}$ şi în consecinţă $\gamma = \gamma_1$, adică $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

146. Fie T punctul de tangenţă al celor două cercuri (fig. 71), triunghiul echilateral ABC înscris ca în enunţ şi CP cea mai lungă dintre tangentele AM, BN, CP. Se notează cu D, E şi F punctele de intersecţie ale dreptelor AT, BT şi CT cu cercul mai mic. Se va arăta că $AM + BN = CP$. Se obţine:

$$AM^2 = AD \cdot AT, \tag{1}$$

$$BN^2 = BE \cdot BT, \tag{2}$$

$$CP^2 = CF \cdot CT. \tag{3}$$

Împărţind relaţiile (1) şi (2) prin relaţia (3), se găseşte

$$\frac{AM^2}{CP^2} = \frac{AD \cdot AT}{CF \cdot CT}, \quad (4) \qquad \frac{BN^2}{CP^2} = \frac{BE \cdot BT}{CF \cdot CT}. \quad (5)$$

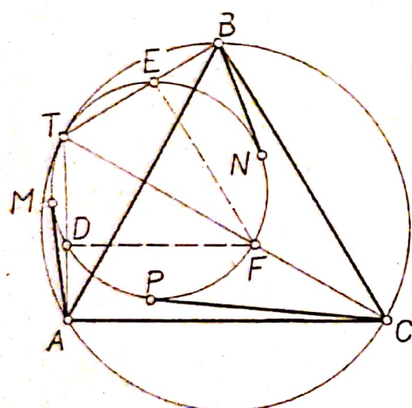


Fig. 71

Cele două cercuri sînt omotetice avînd punctul T drept centru de omotetie. În această omotetie punctele D, E şi F ale cercului mic se transformă în punctele A, B, C ale cercului mare. Rezultă din aceasta că $DF \parallel AC$, $EF \parallel BC$, deci

$$\frac{AD}{FC} = \frac{AT}{CT}, \quad \frac{BE}{CF} = \frac{BT}{CT}.$$

Egalităţile (4) şi (5) se aduc la forma $\frac{AM}{CP} = \frac{AT}{CT}$, $\frac{BN}{CP} = \frac{BT}{CT}$.

Prin adunarea acestor egalităţi se găseşte

$$\frac{AM + BN}{CP} = \frac{AT + BT}{CT}. \tag{6}$$

Punctul T se află pe arcul AB al cercului circumscris triunghiului echilateral ABC. Din această cauză $AT + BT = CT$. În consecinţă $\frac{AM + BN}{CP} = 1$ şi $AM + BN = CP$.

147. Se observă imediat două soluţii ale acestei ecuaţii: $x = 3$, $y = 1$ şi $x = 5$, $y = 3$.

Se va demonstra că nu există alte soluţii. Pentru $x = 1$, $x = 2$, $x = 4$, evident nu se obţin soluţii. Se presupune că o pereche de numere întregi pozitive (x, y), astfel ca $x > 5$, satisface ecuaţia

$$2^x = 3^y + 5.$$

În acest caz membrul întîi al ecuaţiei este divizibil prin 64. Membrul al doilea trebuie să fie de asemenea divizibil cu 64.

Prin împărţirea lui 3^n la 64 se obţin pentru $n = 1, 2, \ldots, 16$ resturile următoare:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
restul	3	9	27	17	51	25	11	33	35	41	59	49	19	57	43	1

Fiindcă restul împărţirii lui 3^{16} la 64 este 1, resturile împărţirii lui 3^n la 64 se vor repeta cu perioada 16. De aceea y trebuie să aibă forma $y = 11 + 16k$. Se va arăta că o astfel de soluţie nu există deoarece după înlocuirea corespunzătoare membrul întîi şi cel de-al doilea al ecuaţiei dau resturi diferite prin împărţire la 17.

Se găseşte uşor că restul împărţirii lui 3^{16} la 17 este 1, deci restul împărţirii lui 3^y la 17 este acelaşi ca şi restul împărţirii lui 3^{11} la 17, adică 7. Trebuie demonstrat însă şi faptul că prin împărţirea lui 2^x la 17 nu se obţine niciodată restul 12.

Pentru $n = 1, 2, \ldots, 8$ se obţin următoarele resturi ale împărţirii lui 2^n la 17:

n	1	2	3	4	5	6	7	8
restul	2	4	8	16	15	13	9	1

Deoarece prin împărţirea lui 2^8 la 17 se obţine restul 1, resturile se repetă cu perioada 8. Restul 12 nu se obţine în nici un caz.

148. Dacă x_i $(i = 1, 2, 3)$ sînt rădăcinile raţionale ale polinomului dat, este evident că $y_i = ax_i$ este rădăcină raţională a polinomului $y^3 + by^2 + acy + a^2d$. Se demonstrează uşor că orice rădăcină raţională a unui polinom cu coeficienţi întregi şi avînd coeficientul dominant egal cu 1 este întreagă. Astfel y_1, y_2 şi y_3 sînt numere întregi, toate trei fiind divizori ai numărului impar a^2d, ceea ce înseamnă că sînt impare. Suma lor b şi suma produselor de cîte două ac trebuie să fie numere impare, adică atît b cît şi c sînt numere impare, ceea ce contrazice ipoteza că bc este par.

149. Fie E și F mijloacele diagonalelor AC și BD, iar G centrul de greutate al triunghiului BCD (fig. 72). Se va demonstra că punctul M în care se intersectează dreptele AG și EF este mijlocul lui EF. Într-adevăr, dacă H este mijlocul lui CG, deoarece $AE = EC$, înseamnă că segmentul EH este paralel cu AG, și fiindcă $FG = GH$, rezultă că $FM = ME$. Se obține astfel că $MG = \frac{1}{2}EH = \frac{1}{4}AG$. Se consideră în continuare omotetia cu centrul în punctul M și raport $-\frac{1}{3}$. Analog ca și pentru punctul G, se demonstrează că toate cele patru centre de greutate se găsesc pe cercul în care se transformă prin omotetie cercul inițial.

150. Fie M, N, P, Q (fig. 73) mijloacele laturilor patrulaterului înscris dat iar S punctul în care se intersectează dreptele MP și NQ. Patrulaterul $MNPQ$ este un paralelogram cu centrul în S fiindcă punctele M și N, P și Q sînt simetrice față de S. Perpendicularele duse din M, N, P și Q pe laturile respective sînt concurente în punctul T, centrul cercului circumscris. Perpendicularele duse prin M, N, P, Q pe laturile opuse sînt paralele cu perpendicularele duse în punctele M, N, P și Q pe aceste laturi, de aceea se vor intersecta într-un punct T' simetric cu punctul T față de S.

151. Fie două cercuri care sînt tangente între ele și la cele două cercuri concentrice date. Diametrul d al fiecăruia dintre aceste cercuri este egal cu $R - r$. Se notează cu n numărul maxim de cercuri care pot fi așezate în această coroană circulară. Se observă ușor că $n = \left[\frac{\pi}{\varphi}\right] (\varphi = \sphericalangle O_1OK)$ (fig. 74), $[x]$ fiind partea întreagă a lui x.

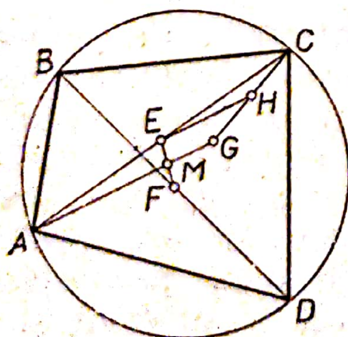


Fig. 72

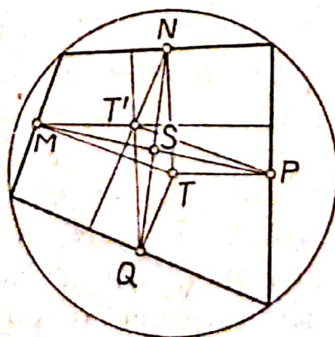


Fig. 73

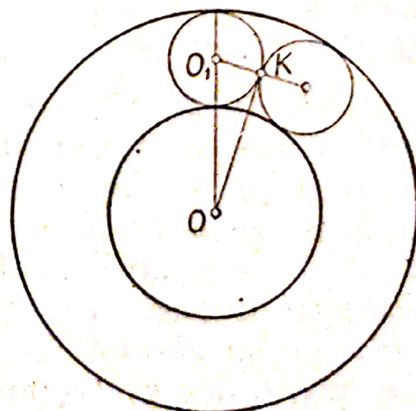


Fig. 74

Din ΔOO_1K se găsește

$$\frac{R-r}{2}=\frac{R+r}{2}\sin\varphi, \qquad (*)$$

ceea ce înseamnă că $\varphi=\arcsin\frac{R-r}{R+r}$, deci

$$n=\left[\frac{\pi}{\arcsin\frac{R-r}{R+r}}\right].$$

Din (*) se obține $\frac{R-r}{R+r}=\sin\varphi$, deci

$$\frac{R}{r}=\frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi}=\mathrm{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right) \text{ sau } \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)=\sqrt{\frac{R}{r}}.$$

Se deduce astfel

$$\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2}=\frac{\sqrt{R}-\sqrt{r}}{\sqrt{R}+\sqrt{r}}.$$

Dacă se consideră dubla inegalitate $\sin x<x<\mathrm{tg}\,x$, se obține rezolvarea problemei. Rezultă din această inegalitate că

$$\frac{R-r}{R+r}<\varphi \text{ și } \frac{\varphi}{2}<\frac{\sqrt{R}-\sqrt{r}}{\sqrt{R}+\sqrt{r}},$$

iar de aici

$$n\leqslant\pi\frac{R+r}{R-r} \text{ și } n+1>\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\sqrt{R}+\sqrt{r}}{\sqrt{R}-\sqrt{r}}$$

sau

$$n<3{,}15\cdot\frac{R+r}{R-r}=\frac{63}{20}\cdot\frac{R+r}{R-r} \text{ și } n+1>\frac{\sqrt{R}+\sqrt{r}}{\sqrt{R}-\sqrt{r}}\cdot\frac{3}{2}.$$

152. Fie x o rădăcină a ecuației (1). În acest caz expresiile

$$y=x^2+2px-p^2 \text{ și } z=x^2-2px-p^2 \qquad (2)$$

verifică condițiile $y>0$, $z\geqslant 0$, $y>z$.

16—c. 1664

Din ecuația (1) se obțin succesiv cu ajutorul notațiilor (2):

$$\sqrt{y} - \sqrt{z} = 1,\ y - z - 1 = 2\sqrt{z},$$

$$4px - 1 = 2\sqrt{z}, \tag{3}$$

$$(4px - 1)^2 = 4z, \tag{3'}$$

$$1 + 4p^2 = 4x^2(1 - 4p^2). \tag{4'}$$

În afară de condiția $p > 0$, este necesară deci și $1 - 4p^2 > 0$, adică

$$0 < p < \frac{1}{2}. \tag{4}$$

Deoarece $y > z$, adică $4px > 0$, este îndeplinită și inegalitatea $x > 0$. Din relația (4′) rezultă astfel

$$x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1 + 4p^2}{1 - 4p^2}}. \tag{5}$$

V e r i f i c a r e. Din relația (5) rezultă relația (4′) și astfel se deduce (3′). Din această cauză $z \geqslant 0$. Pentru a putea ajunge de la (3′) la (3) este necesar și suficient ca $4px - 1 \geqslant 0$, adică

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1 + 4p^2}{1 - 4p^2}} \geqslant \frac{1}{4p}. \tag{6}$$

Din relațiile (6) și (7) rezultă

$$\frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{2} - 1} \leqslant p < \frac{1}{2}. \tag{7}$$

Fiindcă $y = z + 4px$ și $4px > 0$, înseamnă că $y > 0$. În acest mod se obține din relația (3) relația (1). Ecuația (1), în condițiile (7) are o singură rădăcină reală, dată de formula (5).

153. 1) Fie n par. Se calculează numărul triunghiurilor obtuzunghice în vîrful A_1, adică numărul triunghiurilor $A_1A_jA_k$ $(j < k)$. Condiția $\sphericalangle A_kA_1A_j > \frac{\pi}{2}$ este echivalentă cu condiția $k - j > \frac{n}{2}$. Se va calcula numărul perechilor de numere naturale (j, k) pentru cazul cînd $2 \leqslant j < k \leqslant n$ și $k - j > \frac{n}{2}$. Dacă j ia valorile 2, 3,...

$\ldots, \frac{n}{2} - 1$, se poate pune în corespondență fiecărui j numărul k ales în $\frac{n}{2} - 2, \frac{n}{2} - 3, \ldots, 1$ moduri, adică numărul tuturor perechilor este

$$\left(\frac{n}{2} - 2\right) + \left(\frac{n}{2} - 3\right) + \ldots + 1 = \frac{1}{2}\left(\frac{n}{2} - 2\right)\left(\frac{n}{2} - 1\right) =$$

$$= \frac{1}{8}(n - 2)(n - 4).$$

Acesta este numărul triunghiurilor obtuzunghice în vîrful A_1, numărul total al acestor triunghiuri fiind $\frac{1}{8} n(n - 2)(n - 4)$.

2) Fie n impar. Se calculează și pentru acest caz numărul triunghiurilor $A_1A_jA_k$ obtuzunghice în A_1. Se găsește inegalitatea $k - j > \frac{n - 1}{2}$. Numărul perechilor (j, k) astfel încît $2 \leqslant j < k \leqslant n$ și $k - j > \frac{1}{2}(n - 1)$ este

$$\frac{1}{2}(n - 3) + \frac{1}{2}(n - 5) + \ldots + 1 = \frac{1}{8}(n - 1)(n - 3),$$

în total găsindu-se $\frac{1}{8} n(n - 1)(n - 3)$ triunghiuri.

În acest fel, numărul triunghiurilor obtuzunghice pentru n par este $\frac{1}{8} n(n - 2)(n - 4)$, iar pentru n impar este $\frac{1}{8} n(n - 1)(n - 3)$.

154. Se consideră următoarele $n + 1$ numere:

$$0, a_1^2, a_1^2 + a_2^2, a_1^2 + a_2^2 + a_3^2, \ldots, a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2.$$

Printre aceste numere se găsesc cel puțin două, de exemplu $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_j^2$, $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_k^2 (j < k)$, avînd aceleași resturi la împărțirea prin n, deci $a_{j+1}^2 + a_{j+2}^2 + \ldots + a_k^2$ este divizibil prin n.

155. a) 1. Se notează punctele date A, B, C, D, E (fig. 75) și se presupune că din punctul A ies trei segmente roșii*, fie acestea AB,

* În figurile 75, 76, 77 segmentele roșii sînt notate cu linii continue.

AC, AD. Conform enunțului segmentele BC, DB, CD trebuie să fie albastre* și, prin urmare, ΔDBC are toate laturile albastre, ceea ce contrazice enunțul.

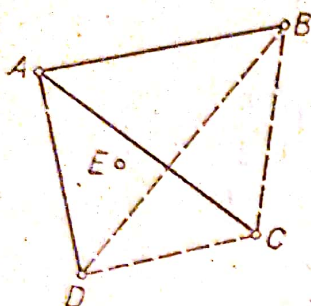


Fig. 75

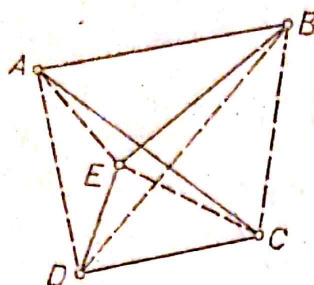


Fig. 76

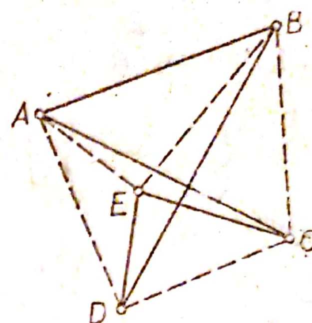


Fig. 77

2. Dacă din punctul A ies două segmente AB și AC de aceeași culoare, fie aceasta roșie, segmentele AD și AE vor fi albastre (v. fig. 75).

Din enunțul problemei rezultă că segmentul BC este albastru, iar segmentul DE roșu. Din punctul D iese încă un segment roșu, fie CD (fig. 75), fie DB (fig. 76).

În ambele cazuri culoarea celorlalte segmente este unic determinată.

b) Linia cerută este $ABEDCA$ sau $ADBCEA$ (fig. 75) și $ABDECA$ sau $ADCBEA$ (fig. 76).

156. Este evident că pot fi așezate zece rînduri paralele de cîte zece sfere fiecare, adică 100 sfere. Numărul sferelor poate fi însă mărit, dacă pe primul rînd se așază 10 sfere, pe al doilea 9 sfere, astfel încît fiecare sferă din al doilea rînd să fie tangentă la două sfere din primul rînd, ș.a.m.d. Atunci înălțimea comună a rîndurilor așezate este $H = 2r + r(n - 1)\sqrt{3}$, n fiind numărul de rînduri. Întrucît $H \leqslant 10$, pentru $r = \frac{1}{2}$ se obține $n \leqslant 6\sqrt{3} + 1$, adică $n = 11$.

Dacă se așază în rîndurile I, III, V, VII, IX, XI cîte 10 sfere, iar în rîndurile II, IV, VI, VIII, X cîte nouă sfere, s-au așezat în total 105 sfere.

Rămîne astfel o diferență de înălțime egală cu $9 - 5\sqrt{3}$. Se caută în continuare să se înlocuiască un rînd de 9 sfere cu unul de 10 sfere. Prin o astfel de înlocuire înălțimea unui rînd va crește cu $4r - 2r\sqrt{3} = r(4 - 2\sqrt{3})$.

---

* În aceleași figuri segmentele albastre sînt notate cu linii punctate.

Pentru $n = 11$ și $r = \frac{1}{2}$ se obține că numărul k rîndurilor astfel înlocuite satisface inegalitatea $k(2 - \sqrt{3}) \leqslant 9 - 5\sqrt{3}$, adică $k \leqslant 3 - \sqrt{3}$, deci $k = 1$. Din această cauză un singur rînd de nouă sfere poate fi înlocuit cu un rînd de 10 sfere.

Se pot așeza în acest mod 106 sfere.

Observație. Problema nu a fost dată la olimpiadă, deoarece demonstrația riguroasă a faptului că $N = 106$ constituie numărul maxim de bile care pot fi așezate este anevoioasă.

157. Se spune că o literă este de prima speță, dacă aceasta intervine o singură dată în cuvînt. În caz contrar va fi numită literă de speța a doua. Literele care sînt alăturate unei litere de speța a doua sînt diferite (aceasta rezultă din proprietatea b).

Dacă cuvîntul conține cel puțin două feluri de litere, el conține cel puțin o literă de prima speță. În caz contrar s-ar obține din acesta cuvîntul abab, ceea ce contravine enunțului. Eliminînd dintr-un cuvînt scris cu ajutorul tuturor n literelor pe cele de speța a doua care coincid cu o literă determinată, se găsește un cuvînt format din $n - 1$ litere. Eliminînd mai departe literele de speța a doua succesiv, se ajunge la un cuvînt scris numai cu litere de prima speță.

Se demonstrează prin inducție completă că un cuvînt nu poate avea lungimea mai mare de $2n - 1$ litere. Pentru $n = 1$ afirmația este adevărată. Se presupune că este adevărată și pentru un alfabet compus din $n = k$ litere și se va demonstra că rămîne adevărată și pentru un alfabet avînd $n = k + 1$ litere.

Fie un cuvînt în care intră cea de-a $(k + 1)$-a literă (diferită de primele k), litera de prima speță α, iar β este litera alăturată acesteia. Dacă β este literă de prima speță, prin ștergerea sa rămîne un cuvînt format din k litere diferite a cărui lungime maximă nu depășește $2k - 1$ litere, cuvîntul inițial avînd astfel o lungime de cel mult $2k$ litere. Dacă β este literă de cea de-a doua speță, se observă ușor că sau ambele litere care sînt alăturate perechii α, β sînt distincte, sau nu există decît o literă alăturată perechii, aceasta fiind situată în consecință la extremitatea cuvîntului.

Din această cauză prin ștergerea perechii α, β rămîne un cuvînt care satisface condiția a) din enunț. Lungimea maximă a cuvîntului rămas este de $2k - 1$ litere, iar a celui inițial de $2k - 1 + 2 = 2(k + 1) - 1$ litere.

Un exemplu de cuvînt avînd $2n - 1$ litere, scris cu alfabetul $a_1, a_2, \ldots, a_n$, este

$$a_1 a_2 a_3 \ldots a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_1.$$

158.

$$f(a, b, c) = \left\| \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right| + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{2}{c} \left| + \left| \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right| + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{2}{c}.$$

Se observă că $|x - y| + x + y = 2\max(x, y)$. De aceea

$$f(a, b, c) = \left| 2\max\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right) - \frac{2}{c} \right| + 2\max\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right) + \frac{2}{c}.$$

Făcînd aceeași observație,

$$f(a, b, c) = 2\max\left[2\max\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right) \frac{2}{c}\right] =$$

$$= 4\max\left[\max\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right), \frac{1}{c}\right] = 4\max\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right).$$

159. Se consideră segmentul MN care separă din ΔABC, ΔAMN de arie jumătate din aria triunghiului ABC (fig. 78). Se notează $AN = x$, $AM = y$, obținîndu-se

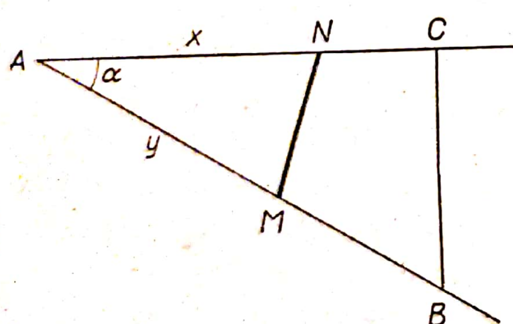


Fig. 78

$$S_{\Delta AMN} = \frac{1}{2} xy \sin\alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} bc \sin\alpha$$

și, în continuare,

$$2xy = bc. \tag{1}$$

Lungimea $MN = d_a$ se calculează folosind teorema cosinusului:

$$d_a^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos\alpha = (x - y)^2 + 2xy(1 - \cos\alpha) =$$

$$= (x - y)^2 + bc(1 - \cos\alpha) \geqslant bc(1 - \cos\alpha) = \bar{d}_a^2. \tag{2}$$

În mod analog se găsește că $d_b^2 \geqslant \bar{d}_b^2$ și $d_c^2 \geqslant \bar{d}_c^2$. Pentru a exprima $\bar{d}_a^2$ prin aria și laturile triunghiului ABC, se găsește mai întîi $1 - \cos\alpha$:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha = (b - c)^2 + 2bc(1 - \cos\alpha),$$

deci

$$1 - \cos\alpha = \frac{a^2 - (b-c)^2}{2bc}.$$

Prin înlocuirea acestei expresii în relația (2) se obține

$$\bar{d}_a^2 = \frac{1}{2}\,[a^2 - (b-c)^2] = 2(p-b)(p-c) = \frac{2S^2}{p(p-a)}, \qquad (3)$$

p fiind semiperimetrul triunghiului, iar S aria înlocuită din formula lui Heron. Efectuînd în formula (3) permutarea circulară a lungimilor a, b, c, se obțin

$$\bar{d}_b^2 = \frac{2S^2}{p(p-b)} \text{ și } \bar{d}_c^2 = \frac{2S^2}{p(p-c)}. \qquad (3')$$

Dacă se presupune că $a \leqslant b \leqslant c$, din (3) și (3′) se obține dubla inegalitate:

$$\bar{d}_a^2 \leqslant \bar{d}_b^2 \leqslant \bar{d}_c^2.$$

Astfel, $\bar{d}_a^2$ va fi mai mică decît $\bar{d}_b^2$ și $\bar{d}_c^2$. Mai trebuie arătat că punctele M și N sînt situate pe laturile triunghiului și nu pe prelungirile lor, adică $x = y < b$. Pentru $x = y$ din egalitatea (1) se obține că $2x^2 = bc$, deci $x = y = \sqrt{\frac{bc}{2}}$. Din inegalitățile $a \leqslant b \leqslant c$ și din inegalitatea triunghiului $c < a + b$ se deduce că $c < 2b$, adică

$$x = y = \sqrt{\frac{bc}{2}} < \sqrt{b^2} = b \leqslant c.$$

D i s c u ț i e. Dacă $a < b$, există un singur segment de lungime minimă egală cu $\bar{d}_a$. Dacă $a = b < c$, există două segmente de lungime minimă egală cu $\bar{d}_a = \bar{d}_a$. În caz că triunghiul este echilateral există trei segmente de lungime minimă dată de $\bar{d}_a = \bar{d}_b = \bar{d}_c$.

160. Ochiul observatorului percepe imaginea lumînării fie direct, fie prin intermediul unei raze luminoase reflectate de o oglindă, fie prin intermediul unei raze luminoase care suferă mai multe reflexii. La fiecare reflexie unghiul de incidență al razei pe oglindă

este egal cu unghiul de reflexie. Proiectînd această configurație de raze pe planul care conține ochiul P al observatorului și este perpendicular pe muchia unghiului diedru, egalitatea unghiurilor de incidență cu unghiurile de reflexie ale razelor se păstrează. Este suficient deci să se considere problema în acest plan. Fie semidreptele OX și OY intersecțiile acestui plan cu planul oglinzilor a, respectiv b. Se consideră o rază luminoasă care se reflectă succesiv pe cele două oglinzi, ultima reflexie avînd loc pe oglinda a. Punctele de incidență pe cele două oglinzi ale razei reflectate succesiv se notează în ordinea inversă propagării razei, adică începînd de la ochiul P al observatorului. Fie acestea A_1, B_2, $A_3, \ldots, C_n$ astfel încît lumina parcurge între lumînare și ochiul observatorului linia poligonală $SC_n \ldots A_3B_2A_1P$. Se găsește în continuare punctul în care se află imaginea virtuală a lumînării. Este clar că acest punct este situat pe dreapta PA_1. Unghiul XOY și fragmentul de linie poligonală de la A_1 la S conținut în acesta se transformă printr-o simetrie față de dreapta OX, obținîndu-se astfel o nouă linie poligonală

$$PA_1B_2^{(1)}A_3^{(1)} \ldots C_n^{(1)}S^{(1)}. \qquad (1)$$

Pe baza legilor reflexiei $\sphericalangle PA_1X = \sphericalangle B_2A_1O$, iar $\sphericalangle B_2A_1O = \sphericalangle B_2^{(1)}A_1O$ din cauza simetriei, ceea ce înseamnă că punctul $B_1^{(1)}$ se află pe dreapta PA_1. Se ia în continuare simetricul unghiului Y_1OX și al fragmentului de linie poligonală conținut în acesta $B_2^{(1)}A_3^{(1)} \ldots C_n^{(1)}S^{(1)}$ față de dreapta OY_1, simetrica dreptei OY în simetria precedentă. Se obține în acest mod linia poligonală $PA_1B_2^{(1)}A_3^{(2)} \ldots C_n^{(2)}S^{(2)}$ al cărei fragment de la P la $A_3^{(2)}$ este un segment. Se continuă în acest fel construcția pînă cînd întreaga linie poligonală se desfășoară sub forma unui segment $PS^{(n)}$.

Modul în care se găsesc imaginile este următorul. Se găsește simetricul punctului S față de una dintre dreptele OZ_1, fie acesta $S^{(1)}$, apoi simetricul $S^{(2)}$ al lui $S^{(1)}$ față de dreapta OZ_2 care face un unghi de 2α cu cea inițială, și se continuă astfel pînă cînd se obține punctul $S^{(n)}$, simetricul lui $S^{(n-1)}$ față de dreapta OZ_{n-1} care formează cu dreapta inițială unghiul $(n-1)\alpha$. Se duce apoi segmentul $PS^{(n)}$ și se verifică dacă intersectează toate semidreptele $OZ, OZ_1, \ldots, OZ_{n-1}$. Dacă le intersectează, $S^{(n)}$ este imagine (se verifică parcurgînd în sens invers operațiile făcute). Cazul în care acest segment nu taie nici una din semidreptele de mai sus nu poate avea loc (v. construcția imaginilor). Se face următoarea observație evidentă. Fie semidreptele OM și ON, care formează un unghi mai mic decît unghiul diedru, și semidreapta OP situată între OM și ON. Se notează cu OQ semidreapta aflată în prelungirea lui OP. În acest caz orice dreaptă

care nu trece prin punctul O nu poate intersecta simultan toate trei semidrepte OM, ON şi OQ. De aceea, construcţia simetricelor succesive ale punctului S şi ale unghiului XOY se încheie cînd prelungirea OF a semidreptei OP intră în unghiul $Z_{n-1}OZ_n$. Segmentul $PS^{(n+1)}$ nu poate intersecta semidreapta OZ_n şi pe toate semidreptele precedente. Unghiurile XOY, XOZ_1, $Z_{n-1}OZ_n$ şi unghiurile construite de cealaltă parte Z_1OY, $Z_{-(k-1)}OZ_{-k}$ acoperă întreg planul, iar $Z_{n-1}OZ_n$ şi $Z_{-(k-1)}OZ_{-k}$ se suprapun. De aceea numărul imaginilor nu depăşeşte $\left[\frac{2\pi}{\alpha}\right]+1$.

Numărul imaginilor poate fi şi mai mic, în funcţie de aşezarea lumînării şi a observatorului, din cauza imaginii din unul sau ambele unghiuri externe, dar nu poate scădea sub $\left[\frac{2\pi}{\alpha}\right]-1$.

Amănuntele care urmează depind nu numai de poziţia lumînării şi a observatorului, ci şi de paritatea numărului $\left[\frac{2\pi}{\alpha}\right]$. Dacă $\alpha = \left[\frac{\pi}{n}\right]$ iar n este întreg, pentru orice poziţie a observatorului şi a lumînării sînt vizibile exact $2n$ imagini (socotind şi lumînarea însăşi, ca dealtfel şi în deducţiile anterioare). Întregul plan este împărţit în acest caz în $2n$ unghiuri. Unghiul $X'OY'$ opus la vîrf cu unghiul XOY este critic. În acest caz punctele $S^{(n)}$ şi $S^{(-n)}$ coincid. $S^n \equiv S^{(-n)} \equiv S^\circ$ sau cînd n este par, ocupînd în $X'O'Y'$ aceeaşi poziţie ca şi în XOY, sau pentru n impar pe cea simetrică. Din această cauză fie se observă imaginea în oglinda OX cînd segmentul PS° intersectează pe OX, fie în oglinda OY cînd segmentul PS° intersectează pe OY.

161. Dacă patrulaterul este concav, luînd simetricele lui c şi d faţă de diagonala interioară se obţine un patrulater convex de arie $S' > S$. Se pot considera din această cauză numai patrulatere convexe. Patrulaterul este împărţit de diagonală în două triunghiuri. Aria primului nu depăşeşte jumătate din produsul a două dintre laturile sale, fie acesta $\frac{ab}{2}$. Aria celuilalt nu depăşeşte $\frac{cd}{2}$. Adunînd inegalităţile respective, se găseşte $2S \leqslant ab + cd$. În mod analog $2S \leqslant bc + ad$. Adunînd aceste două inegalităţi obţinute, se constată că

$$4S \leqslant (a+c)(b+d), \quad \text{adică} \quad S \leqslant \frac{a+c}{2}\cdot\frac{b+d}{2}.$$

162. 1. Fie $n = 2k + 1$. La prima comandă elevul avînd numărul $k+1$ rămîne pe loc, iar ceilalţi se schimbă între ei doi cîte doi astfel:

$$1 \rightleftarrows 2k+1,\ 2 \rightleftarrows 2k,\ 3 \rightleftarrows 2k-1, \ldots, k \rightleftarrows k+2,$$

obţinîndu-se succesiunea $2k+1, 2k, 2k-1, 2k-2, \ldots, 1$ (simbolul $a \rightleftarrows b$ înseamnă că elevii purtînd numerele respective şi-au schimbat locurile). La a doua comandă rămîne pe loc elevul avînd numărul $2k+1$, iar

$$2k \rightleftarrows 1,\ 2k-1 \rightleftarrows 2,\ 2k-2 \rightleftarrows 3, \ldots, k+1 \rightleftarrows k$$

obţinîndu-se succesiunea cerută $2k+1, 1, 2, 3, \ldots, 2k$.

2. Fie $n = 2k$. La prima comandă elevii avînd numerele 1 şi $k+1$ rămîn pe loc, iar $2 \rightleftarrows 2k$, $3 \rightleftarrows 2k-1$, $4 \rightleftarrows 2k-2, \ldots, k \rightleftarrows k+2$, găsindu-se succesiunea $1, 2k, 2k-1, \ldots, 2$.

La a doua comandă

$$1 \rightleftarrows 2k,\ 2k-1 \rightleftarrows 2,\ 2k-2 \rightleftarrows 3, \ldots, k+1 \rightleftarrows k$$

şi se obţine succesiunea cerută $2k, 1, 2, 3, \ldots, 2k-1$.

163. Dacă se taie figura după liniile care mărginesc zonele atît pe o parte cît şi pe cealaltă, se obţin cel mult 100 de porţiuni care vor fi notate A_{ij}, considerînd că A_{ij} este intersecţia dintre porţiunea A_i la prima împărţire în zone şi porţiunea B_j la a doua împărţire $(i, j = 1, 2, \ldots, 10)$. Se consideră că porţiunea A_i este colorată cu cea de-a i-a culoare. Numărul de moduri în care poate fi colorată porţiunea B_j este 10 !. Se vor numerota acestea într-o ordine oarecare cu numerele $k = 1, 2, \ldots, 10!$ şi pentru fiecare mod S_k va fi suma ariilor porţiunilor A_{ij} colorate la fel pe ambele părţi [dacă pentru perechea de indici (j, i) nu există A_{ij}, o vom considera pe aceasta de arie nulă].

L e m ă. $\sum_{k=1}^{10!} S_k = 9!.$ (*)

Rezolvarea problemei se reduce la demonstrarea acestei leme. Dacă 10 ! termeni nenegativi au suma 9 !, există printre aceştia unul care nu este mai mic decît $\frac{9!}{10!} = \frac{1}{10}$, deoarece în caz contrar suma ar fi mai mică decît $10! \cdot \frac{1}{10} = 9!$.

Pentru demonstrarea lemei se găseşte de cîte ori aria S_{ij} a porţiunii A_{ij} se cuprinde în membrul întîi al egalităţii (*), ceea ce revine a afla pentru cîte numere k suma S_k îl conţine ca termen pe S_{ij}.

Pentru ca S_{ij} să fie termen al lui S_k este necesar şi suficient ca în cel de al k-lea mod de colorare porţiunea B_j să aibă aceeaşi culoare ca şi A_i. Restul de nouă culori se pot atribui celorlalte porţiuni în 9 ! moduri. Astfel, suma $\sum_k S_k$ conţine fiecare termen S_{ij} de 9 ! ori, adică $\sum_k S_k = 9!\ \Sigma S_{ij} = 9!$. Lema este demonstrată.

164. Fie $ABCDEF$ hexagonul dat, iar P, Q şi R punctele de intersecţie ale diagonalelor sale AD, BE şi CF (fig. 79). Astfel hexagonul se descompune în ΔPQR şi trei patrulatere formate fiecare din două laturi consecutive ale hexagonului şi două segmente de diagonală. Dacă diagonalele considerate sînt concurente, atunci patrulaterul se descompune numai în cele trei patrulatere. Cel puţin aria unuia dintre aceste patrulatere nu depăşeşte $\frac{1}{3}S$, fie acesta $APEF$. Se duce diagonala sa FP care îl împarte în două triunghiuri între care unul a cărui arie nu depăşeşte $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}S$, fie această arie $S_{\Delta FPE}$. În acest caz aria unuia din triunghiurile EFA şi FED nu depăşeşte aria $S_{\Delta FPE}$. Într-adevăr, acestea au înălţimea FE comună, iar vîrfurile sînt situate pe aceeaşi dreaptă, P fiind situat între A şi D, de aceea înălţimea din P a triunghiului FPE nu este mai mică decît înălţimea unuia din triunghiuri.

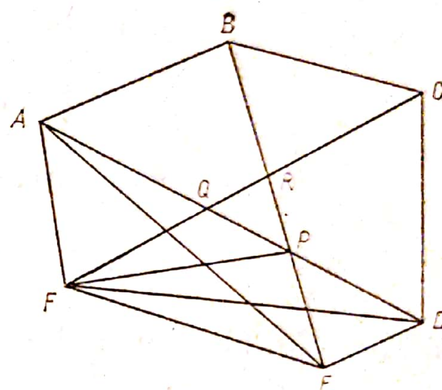


Fig. 79

165. Fie $k = 100a + 10b + c$, a fiind un număr întreg nenegativ, $0 \leqslant b \leqslant 9$, iar $0 \leqslant c \leqslant 9$. Se observă uşor că ultimele două cifre ale acestuia nu depind de a. Oricare 100 de numere naturale consecutive s-ar lua, ultimele două cifre iau toate valorile între 00 şi 99, inclusiv acestea. De aceea se aleg numerele consecutive de la 00 la 99. Se calculează ultimele două cifre ale sumei de puteri a opta :

$$\sum_{k=0}^{99} k^8 = \sum_{x=0}^{9}\sum_{y=0}^{9}(10x+y)^8 = \sum_{x=0}^{9}\sum_{y=0}^{9}[(10x)^8 + 8(10x)^7 + \ldots$$

$$\ldots + 8\cdot 10xy^7 + y^8].$$

Se observă că ultimele două cifre sînt influenţate numai de ultimii doi termeni:

$$\sum_{x=0}^{9}\sum_{y=0}^{9}(80xy^7 + y^8) = \sum_{y=0}^{9}(80 \cdot 45y^7 + 10y^8).$$

Primul termen are ultimele două cifre zerouri, de aceea penultima cifră este dată de $\sum_{0}^{9} y^8$. Avînd în vedere cifra terminală a puterilor:

întîi	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a doua	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1
a patra	0	1	6	1	6	5	6	1	6	1
a opta	0	1	6	1	6	5	6	1	6	1

rezultă că $2(1 + 6 + 1 + 6) + 5 = 33$, deci suma se termină în 30.

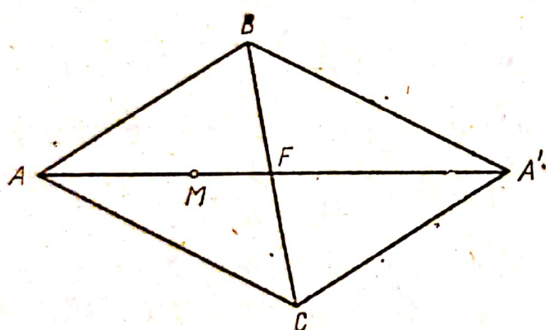


Fig. 80

166. Se completează ΔABC formînd paralelogramul $ABA'C$ (fig. 80). Segmentul AM este o treime din AA', $\sphericalangle ABA' = \hat{B} + \hat{C}$, dar conform enunţului $40° \leqslant \hat{A} \leqslant 70°$, de aceea $110° \leqslant \hat{B} + \hat{C} \leqslant 140°$ (*). În acest mod, vîrfurile B sînt supuse condiţiei (*), adică se află în afara segmentului de cerc capabil de 140° şi în interiorul segmentului de cerc capabil de 110°, construite pe segmentul AA'. Pe de altă parte, punctul B se află situat în afara segmentului de cerc capabil de 70° şi în interiorul segmentului de cerc capabil de 40°, construite pe segmentul AF. În acest caz $\hat{C} = \sphericalangle FBA'$, adică punctul B trebuie să se afle de asemenea şi în interiorul segmentului de cerc capabil de 40° şi în afara segmentului de cerc capabil de 70°, construite pe FA'. Se consideră intersecţia acestor trei lunule.

D i s c u ţ i e. Prin punctul P de intersecţie al segmentelor de cerc capabile de 70° şi construite pe AF şi FA' trece segmentul de cerc construit pe AA' şi capabil de 140°, iar prin punctele Q şi R

trece segmentul de cerc capabil de 110° şi care se sprijină pe AA'. Locul geometric căutat este, prin urmare, triunghiul curbiliniu PQR (fig. 81).

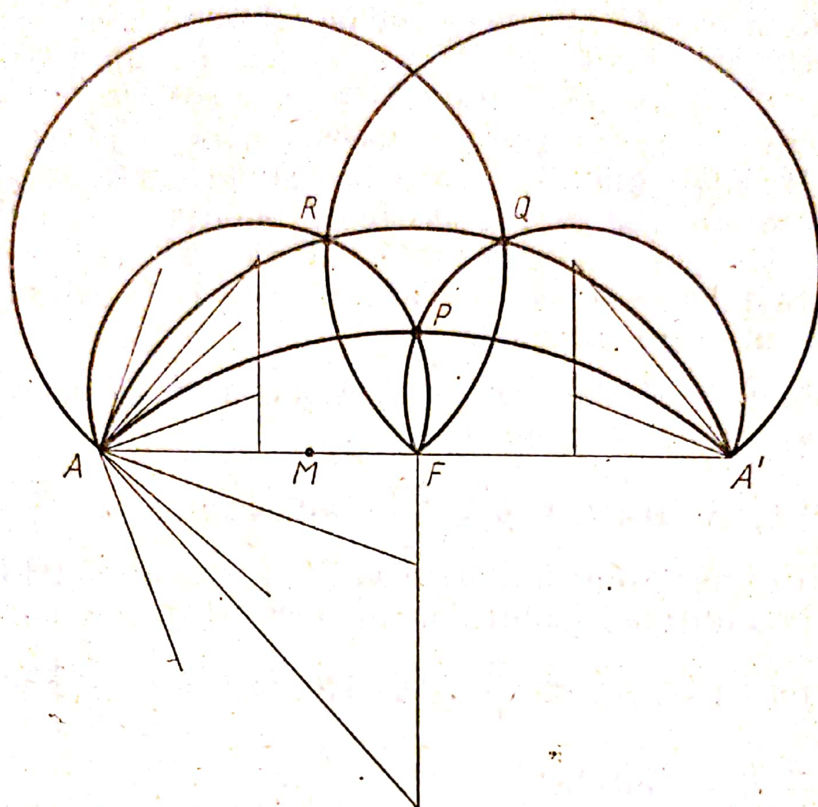


Fig. 81

167. Fie $AB \perp CD$, $DB \perp AC$, $CB \perp AD$ (fig. 82). Patrulaterul $EFGH$ este dreptunghi, deoarece $EH \parallel AB$ şi $EH = \frac{1}{2} AB$, $FG \parallel AB$ şi $FG = \frac{1}{2} AB$, adică $FG \parallel EH$ şi $FG = EH$. Fiindcă $FE \parallel CD$ şi $EH \parallel AB$, unghiul format de FE cu EH este egal cu unghiul format de CD cu AB, adică este unghi drept. Într-un dreptunghi diagonalele sînt egale, adică $FH = EG$. Se notează cu O mijlocul segmentului FH. Patrulaterul $KFLH$ este dreptunghi, iar diagonalele acestuia se intersectează tot în O. Se deduce astfel că $FO = OH = OK = OL = OE = OG$, adică punctele F, G, H, E, K, L se află pe o sferă cu centrul în punctul O.

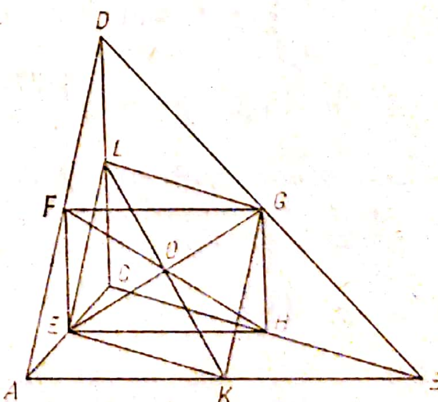


Fig. 82

168. Oricare față a cubului se poate transforma printr-o rotație în oricare altă față. Fie punctul M situat pe o față a cubului, însă nu pe una din muchii și nici într-un vîrf. Dacă numărul de transformate prin rotație ale punctului M care se găsesc pe aceeași față este k, numărul total de transformate ale lui M va fi $6k$. În mod analog, dacă punctul H este situat pe o muchie și prin rotație numărul transformatelor sale care se află pe aceeași muchie este l, numărul total de transformate ale lui H va fi $12l$. Din această cauză, numărul total de puncte care se găsesc pe fețele și muchiile cubului este divizibil cu 6. Un punct situat într-unul din vîrfuri are 8 transformate. Din aceasta înseamnă că sau 100, sau 100 — 8 sînt multipli de 6, ceea ce nu este adevărat.

169. Se observă că dacă x verifică inecuația, oricare ar fi n, aceasta este satisfăcută și de $x + 2k\pi$.

Dacă $n = 1$, rezultă $\sin x \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$, adică $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{3}$ și $\frac{2}{3}\pi \leqslant$ $\leqslant x \leqslant 2\pi$. Mulțimea soluțiilor care verifică toate inegalitățile va fi deci inclusă în mulțimea soluțiilor pentru acest caz particular.

Fie x_0 astfel ca $0 < x_0 < \frac{\pi}{3}$. Dacă se ia $k = \left[\frac{\pi}{3x_0}\right] + 1$, rezultă $\frac{2\pi}{3} > kx_0 > \frac{\pi}{3}$ și se obține

$$\sin x_0 + \sin 2x_0 + \ldots + \sin kx_0 > \frac{\sqrt{3}}{2},$$

deoarece toți termenii sînt pozitivi, iar $\sin kx_0 > \frac{\sqrt{3}}{2}$. Valorile $x \in$ $\in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ nu verifică deci inecuațiile.

Faptul că toți $x \in \left[\frac{2}{3}\pi, 2\pi\right]$ sînt soluții ale inecuației se verifică astfel. Este evident că $x = 2k\pi$ este soluție. Se calculează suma din membrul întîi al ecuației înmulțind-o și împărțind-o cu $2 \sin \frac{x}{2}$, $x \neq 2\pi$. Deoarece

$$2 \sin \frac{x}{2} \sin k\pi = \cos\left(k - \frac{1}{2}\right)x - \cos\left(k + \frac{1}{2}\right)x,$$

rezultă

$$\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left(\cos\frac{1}{2}x - \cos\frac{3}{2}x + \right.$$

$$\left. + \cos\frac{3}{2}x - \cos\frac{5}{2}x + \ldots + \cos\frac{2n-1}{2}x - \cos\frac{2n+1}{2}x\right) =$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left[\cos\frac{x}{2} - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right].$$

Dacă se notează $\frac{x}{2} = z$, rămîne să se verifice că orice $z \in \left(\frac{\pi}{3}, \pi\right)$ satisface sistemul de inecuații:

$$\frac{\cos z - \cos(2n+1)z}{2\sin z} \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Este însă adevărată relația

$$\frac{\cos z - \cos(2n+1)z}{2\sin z} \leqslant \frac{\cos z + 1}{2\sin z}.$$

Deoarece $z \in \left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$ sînt soluții ale inecuației $\frac{\cos z + 1}{2\sin z} \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$, vor fi soluții și ale inecuației de mai sus.

Răspuns: $x \in \left[\frac{2}{3}\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi\right]$.

170. Un grup de traducători în care fiecare limbă este știută de a și numai de a persoane se va numi grup de volum a. Se demonstrează prin inducție completă că un grup de volum $2n$ conține o parte de volum $2k$ ($k \leqslant n$), ceea ce, în particular, demonstrează afirmația din enunțul problemei.

Pentru $k = 0$ și $k = n$ afirmația este evidentă. Este deci suficient să se considere $k < n$, $n > 1$. Fie p numărul traducătorilor care știu limbile J și M (categoria A), q numărul celor care știu lim-

bile M şi P (categoria B) şi r numărul celor care ştiu limbile J şi P (categoria C). Este evident că aceştia sînt diferiţi. Dacă $p > 0$, $q > 0$ şi $r > 0$, separînd din fiecare categorie A, B, C, cîte un traducător, cei care rămîn formează un grup de volum $2(n-1)$ şi folosind ipoteza de la inducţie se poate găsi o parte de volum $2k$.

Dacă $p = q = r = 0$, atunci traducătorii sînt fie poligloţi (în număr de l) ştiind toate trei limbi, fie sînt specialişti într-o singură limbă, pentru fiecare dintre cele trei limbi găsindu-se acelaşi număr de astfel de traducători, în total aceştia fiind $2n - l$. Specialiştii într-o singură limbă pot fi grupaţi cîte trei într-un colectiv poliglot. Dintre cei $2n$ poligloţi şi poligloţi colectivi se pot separa totdeauna $2k$ în condiţiile cerute.

Se consideră, în continuare, că $p \leqslant q \leqslant r$. Dacă $p = q = 0$, iar $r > 0$, după îndepărtarea tuturor poligloţilor şi a numărului maxim de poligloţi colectivi dintre specialiştii într-o singură limbă, rămîn r traducători de categoria C. Întrucît numărul traducătorilor care vorbesc cîte o singură limbă este acelaşi, există cel puţin încă r specialişti numai în limba M. Se mai formează r perechi poliglote din traducătorii de categoria C şi cei care ştiu numai limba M. Cei care rămîn trebuie să fie specialişti într-o singură limbă, şi cum pentru fiecare dintre limbi numărul lor este acelaşi, ei pot fi grupaţi în colective poliglote. Se poate deci alege şi în acest caz din traducătorii poligloţi, perechile poliglote şi colectivele poliglote, o parte de volum cerut. Dacă $p = 0$, $q > 0$, $r > 0$, după îndepărtarea poligloţilor şi a numărului maxim de colective poliglote de specialişti într-o singură limbă, printre traducătorii bilingvi se vor găsi $q + r$ care ştiu limba P, q traducători de limbă M şi r traducători de limbă J. Înseamnă în acest caz că se pot găsi cel puţin q specialişti numai în limba J şi r specialişti numai în limba M. Dacă dintre aceştia se separă un specialist numai în limba J, unul numai în limba M, unul de categorie B şi unul de categorie C, restul vor forma un grup de volum de $2(n-1)$ în care se poate găsi partea cerută, conform ipotezei de la inducţie.

171. Fie $l_1(z) = \dfrac{1}{A} l(z) = z - \gamma$, $\gamma = -\dfrac{B}{A}$, $Q_2 = z \cdot \gamma$. Dacă se notează $M_1 = \max\limits_{-1 \leqslant x \leqslant 1} |l(x)|$, atunci $M_1 = \dfrac{1}{|A|} M$ şi este suficient să se arate că $|l_1(z)| \leqslant M_1 \rho$. În continuare $|l_1(x)| = |x - \gamma|$, adică tocmai lungimea segmentului XQ_2, iar dacă x se află pe segmentul $[-1, 1]$, conform unei proprietăţi cunoscute a triunghiului $Q_1Q_2Q_3$, segmentul Q_2X este mai mic decît cel puţin una dintre laturile Q_2Q_1

şi Q_2Q_3. De aceea $M_1 = \max(Q_2Q_1, Q_2Q_3)$. Se găseşte apoi că $|l_1(z)| = |z - \gamma| = PQ_2$. În acest fel s-a ajuns la următoarea problemă de geometrie. În patrulaterul $PQ_1Q_2Q_3$ lungimea diagonalei Q_1Q_3 este 2. Trebuie să se demonstreze că lungimea diagonalei PQ_2 satisface inegalitatea $PQ_2 \leqslant (PQ_1 + PQ_2)\max(Q_2Q_1, Q_2Q_3)$. Se observă imediat că $M_1 = \max(Q_1Q_2, Q_2Q_3) \geqslant 1$, deoarece în caz contrar $Q_1Q_2 + Q_2Q_3 < 2 = Q_1Q_3$, ceea ce este imposibil. Considerînd triunghiurile Q_1Q_2P şi Q_3Q_2P, se obţine

$$Q_1Q_2 + Q_1P \geqslant Q_2P \text{ şi } Q_3Q_2 + Q_3P \geqslant Q_2P,$$

deci

$$\frac{Q_1Q_2 + Q_2Q_3 + Q_3P + PQ_1}{2} \geqslant Q_2P.$$

Se examinează cazurile:

1) $Q_3P + PQ_1 \geqslant Q_1Q_2 + Q_2Q_3$. În acest caz $Q_3P + PQ_1 \geqslant Q_2P$, iar conform celor de mai sus $M_1 \geqslant 1$, rezultînd

$$(Q_3P + PQ_1)M_1 \geqslant Q_2P.$$

2) $Q_3P + PQ_1 \leqslant Q_1Q_2 + Q_2Q_3$. Se îndeplineşte astfel inegalitatea $Q_2P \leqslant 2\max(Q_1Q_2, Q_2Q_3) = 2M_1$ şi deoarece din ΔQ_1PQ_3 se găseşte că $Q_3P + PQ_1 \geqslant Q_1Q_3 = 2$, înseamnă că $Q_2P \leqslant 2M_1 \leqslant (Q_3P + PQ_1)M_1$, ceea ce trebuia demonstrat.

172. Dacă se pun în evidenţă punctele $A_1, A_2, \ldots, A_6$, $6 < 2\pi$, $2\pi - 6 = \alpha_1 < 1$, punctul A_7 aflîndu-se deci pe arcul A_0A_1 şi împărţindu-l în fragmentele $A_0A_7 = 1 - \alpha_1$ şi $A_7A_1 = \alpha_1$. Arcele sînt astfel de trei feluri: de lungime α_1, de lungime $1-\alpha_1$ şi de lungime 1. Se consideră cazul general, cînd numărul punctelor $N \geqslant 7$. Fie A_s şi A_t cele mai apropiate puncte de A_0 situate în stînga, respectiv în dreapta sa.

L e m ă. Egalitatea $M = 2\pi Q$, unde M şi Q sînt numere întregi, implică $M = Q = 0$.

Adevărul lemei rezultă din iraţionalitatea lui π, $\pi \neq \dfrac{M}{2Q}$ pentru orice valori întregi ale lui M şi Q.

Astfel $s = 2\pi\sigma - \varphi$, $t = 2\pi\tau + \psi$, şi deoarece $s + t = 2\pi(\sigma + \tau) + (\psi - \varphi)$, conform lemei, $\psi - \varphi \neq 0$.

Se va demonstra prin inducţie completă asupra lui N că arcele pot avea numai trei lungimi: φ, ψ şi eventual $\varphi + \psi$. Aceasta este adevărat pentru $N = 7$ şi se presupune că este adevărat şi pentru punctele $A_0, A_1, \ldots, A_N$. Se aleg, ca mai sus, punctele A_s şi A_t. Fie punctul A_{N+1} situat pe arcul A_qA_r $(q \neq 0,\ r \neq 0)$. Evident că lungimea arcului A_qA_{N+1} este egală cu cea a arcului A_0A_{N+1-q}, fiindcă este determinată numai de diferenţa indicilor, iar $A_0A_{N+1-q} \geqslant A_0A_t$ din modul în care a fost ales A_t. (Se observă că $N - 1 - q \leqslant N$.) Reciproc, $A_0A_t = A_{N+1-t}A_{N+1} \geqslant A_qA_{N+1}$. Rezultă că $\psi = A_0A_t = A_qA_{N+1}$ şi $q = N + 1 - t$. Analog, $A_{N+1}A_r = A_sA_0$, $r = N + 1 - s$, aşa că dacă un singur arc de lungime $\psi + \varphi$ se descompune în două arce de lungime ψ şi φ, numărul lungimilor pe care le pot avea arcele nu se schimbă. În continuare se consideră cazul cînd $q = 0$ sau $r = 0$ ($q = r = 0$ numai dacă $N = 1$). Numai unul din arcele $A_{N+1}A_r$ (dacă $q = 0$) sau A_qA_{N+1} (dacă $r = 0$) sînt egale respectiv cu φ sau ψ. Se presupune că primul dintre arcele de mai sus are lungimea ψ. Se va arăta că punctele $A_0, A_1, \ldots, A_N$ împart întregul cerc numai în arce de lungime φ şi ψ, toate arcele de lungime $\varphi + \psi$ fiind deja descompuse. Prin reducere la absurd, se admite că ar exista un astfel de arc A_mA_n. Ar rezulta $(n - 2\pi\nu) - (m - 2\pi\mu) = (t - 2\pi\tau) - (s - 2\pi\sigma) = \varphi + \psi$, deci $(n - m) - (t - s) = 2\pi[(\mu - \nu) - (\chi - \rho)]$ şi $m - n = t - s$. Dacă $m \geqslant s$, punctul A_{m-s} trebuie să se afle pe arcul A_mA_n deoarece pe arcul A_sA_t se află punctul A_0. Rămîne cazul $m < s$, în care pe arcul A_sA_t se găseşte punctul A_{N+1} şi deci punctul $A_{N+1-s+m}$ se află pe arcul A_mA_n, ceea ce încheie demonstraţia afirmaţiei de mai sus. Adăugînd un al $N + 1$ lea punct se obţin din nou trei lungimi ale arcelor: φ, ψ şi $\psi - \varphi$. Trebuie să se determine însă la care din aceste două tipuri aparţine $N = 1000$. Fie numărul N de al doilea tip, adică astfel ca punctele $A_0, A_1, \ldots, A_N$ împart cercul în arce care au numai două lungimi. Primul N care este de acest tip va fi 6.

Dacă punctele $A_0, A_1, \ldots, A_N$ împart cercul în N arce de lungime ψ şi G arce de lungime φ $(\psi > \varphi)$, punctele următoare $A_{N+1}, A_{N+2}, \ldots, A_{N+F}$ vor împărţi arcele de lungime ψ, în arce de lungime φ şi $\chi = \psi - \varphi$, ceea ce va duce la o descompunere în $G + F$ arce de lungime φ şi F arce de lungime χ. Se deduce uşor prin inducţie că dacă pentru fiecare N_k de al doilea tip numerele G_k şi F_k vor fi pare, şi toate care urmează vor fi pare. În cazul $N = 6$ cercul este împărţit în 6 arce de lungime 1 şi un arc de lungime $\alpha_1 = 2\pi - 6 = 0{,}28318\ldots$ Următorii N de al doilea tip vor fi $N_2 = 12$ cînd se găsesc 6 arce de lungime $1 - \alpha_1$ şi 7 arce de lungime α_1, apoi $N_3 = 18$, cînd se găsesc 6 arce de lungime $1 - 2\alpha_1 = 0{,}574\ldots$ şi 13 arce de lungime α_1. În acest caz cel mai mare va fi segmentul

din dreapta. Însă $1 - 3\alpha_1 = 0{,}15\ldots$ şi în continuare cel mai mare va fi segmentul de cerc din stînga. Cînd $N_4 = 24$ se găsesc 6 arce de lungime $1 - 3\alpha_1$ şi 20 arce de lungime α_1, adică G_4 şi F_4 sînt pare, deci vor fi pare şi următoarele G_k şi F_k.

Punctele date $A_0, A_1, \ldots, A_{1000}$ descompun cercul în 1001 arce care, conform demonstraţiei date, vor avea trei feluri de lungimi.

173. Se demonstrează mai întîi necesitatea condiţiilor (B). Dacă $f = g = 0$, condiţia (A) este satisfăcută pentru orice triplet (a, b, c) de numere reale. Dacă $f \neq 0$ şi $g = 0$, condiţia (A) poate fi îndeplinită numai dacă $a \geqslant 0$. Dacă $f = 0$ şi $g \neq 0$, (A) este adevărată numai dacă $c \geqslant 0$. Fie în continuare $f \neq 0$ şi $g = \lambda f$, λ fiind un număr real arbitrar. Se găseşte

$$af^2 + bfg + cg^2 = (a + b\lambda + c\lambda^2)f^2.$$

Polinomul de gradul al doilea în λ care se găseşte în paranteză va fi nenegativ pentru orice valoare reală a lui λ, numai dacă nu are două rădăcini reale distincte, adică dacă $\Delta = b^2 - 4ac \leqslant 0$, ceea ce echivalează cu cea de-a treia condiţie (B).

Suficienţa condiţiei (B) poate fi demonstrată astfel: dacă $fg \geqslant 0$,

$$af^2 + bfg + cg^2 \equiv (\sqrt{a}f - \sqrt{c}g)^2 + (2\sqrt{ac} + b)fg \geqslant 0,$$

iar dacă $fg < 0$,

$$af^2 + bfg + cg^2 \equiv (\sqrt{a}f + \sqrt{c}g)^2 - (2\sqrt{ac} - b)fg \geqslant 0$$

pe baza condiţiei $4ac \geqslant b^2$.

174. Se alege unitatea de lungime astfel ca $AB = AC = 1$ şi deci $BA' = CA' = \sin 10°$, A' fiind mijlocul bazei BC (fig. 83).

În triunghiul isoscel ACD, evident,

$$CD = \frac{1}{2\cos 20°}.$$

Se fac notaţiile $\sphericalangle EDC = x$ şi $\sphericalangle CED = y$. Pe baza teoremei tangentelor se obţine din ΔDCE că

$$\frac{\dfrac{1}{2\cos 20°} + 2\sin 10°}{\dfrac{1}{2\cos 20°} - 2\sin 10°} = \frac{\operatorname{tg}\dfrac{y + x}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{y - x}{2}}.$$

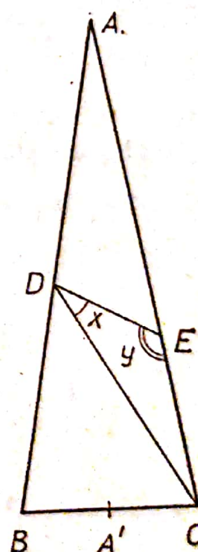


Fig. 83

Deoarece $y + x = 160°$, ecuaţia precedentă ia forma

$$\frac{\operatorname{tg} 80°}{\operatorname{tg}(80° - x)} = \frac{1 + 4\sin 10° \cos 20°}{1 - 4\sin 10° \cos 20°}.$$

Membrul întîi al acestei egalităţi devine succesiv

$$\frac{\operatorname{tg} 80°}{\operatorname{tg}(80° - x)} = \frac{\operatorname{ctg} 10°}{\operatorname{ctg}(x + 10°)} = \frac{\operatorname{tg}(x + 10°)}{\operatorname{tg} 10°} = \frac{\cos 10°}{\sin 10°} \operatorname{tg}(x + 10°),$$

iar membrul drept al aceleiaşi egalităţi

$$\frac{1 + 4\sin 10° \cos 20°}{1 - 4\sin 10° \cos 20°} = \frac{1 + 2(\sin 30° - \sin 10°)}{1 - 2(\sin 30° - \sin 10°)} = \frac{1 - \sin 10°}{\sin 10°}.$$

Astfel, $\frac{\cos 10°}{\sin 10°} \operatorname{tg}(x + 10°) = \frac{1 - \sin 10°}{\sin 10°}$, adică $\operatorname{tg}(x + 10°) = \frac{1 - \sin 10°}{\cos 10°}$.

Calculul membrului drept al ultimei relaţii arată că

$$\frac{1 - \sin 10°}{\cos 10°} = \frac{1 - \cos 80°}{\sin 80°} = \frac{\sqrt{(1 - \cos 80°)^2}}{\sqrt{1 - \cos^2 80°}} = \sqrt{\frac{1 - \cos 80°}{1 + \cos 80°}} = \operatorname{tg} 40°.$$

Deoarece $0 < x < 180°$, mărimea unghiului căutat este 30°.

175. 1) Dacă $m = 0$, inegalitatea dată este evidentă.

2) Dacă $m \geqslant 1$,

$$\left(1 + \frac{a}{b}\right)^m + \left(1 + \frac{b}{a}\right)^m \geqslant 2\sqrt{\left(1 + \frac{a}{b}\right)^m \left(1 + \frac{b}{a}\right)^m} =$$

$$= 2\sqrt{\left(2 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^m} \geqslant 2\sqrt{4^m} = 2^{m+1}.$$

3) Dacă $m = -n$, $n > 0$,

$$\left(1 + \frac{a}{b}\right)^m + \left(1 + \frac{b}{a}\right)^m = \left(\frac{b}{a+b}\right)^n + \left(\frac{a}{a+b}\right)^n =$$

$$= \frac{1}{2^n}\left[\left(\frac{2b}{a+b}\right)^n + \left(\frac{2a}{a+b}\right)^n\right] = \frac{1}{2^n}\left[\left(1 + \frac{b-a}{a+b}\right)^n + \right.$$

$$\left. + \left(1 + \frac{a-b}{a+b}\right)^n\right] \geqslant \frac{1}{2^n} \cdot 2 = 2^{-n+1} = 2^{m+1},$$

fiindcă

$$\left(1 + \frac{b-a}{a+b}\right)^n + \left(1 + \frac{a-b}{a+b}\right)^n \geqslant 2,$$

relaţie care se poate demonstra fie prin inducţie, fie aplicînd formula binomului lui Newton.

176. Demonstraţia se face prin inducţie faţă de k.

Propoziţia este evidentă pentru $k = 0$. Se presupune că ea este adevărată pentru $k = n$, rezultînd că dacă polinomul $P(x) = a_0x^{n+1} + a_1x^n + \ldots + a_{n+1}$ este divizibil cu m, la fel va fi şi polinomul $P(x+1) - P(x) = (n+1)a_0x^n + \ldots$ al cărui grad este n. Astfel, conform ipotezei făcute, $n!(n+1)a_0$ se divide la m. Reciproc, în cazul cînd $k!a_0$ este multiplu de m, polinomul $P(x) = a_0x(x+1)\ldots$ $\ldots(x+k-1)$ care se divide totdeauna la $k!a_0$ se va divide şi la m.

177. Se poate considera că $x \leqslant y \leqslant z$ şi se va căuta să se construiască un astfel de triunghi. Este clar că punctul C poate fi luat arbitrar la distanţa z de punctul O. Punctul A trebuie să se afle astfel pe cercul S_1 de rază x şi centrul O. Considerînd, în continuare, că triunghiul este parcurs în sensul A, B, C opus sensului acelor de ceasornic, punctul B se va afla pe cercul S_2 obţinut prin rotaţia cercului S_1 cu 60° în jurul punctului C în sens opus celui al acelor de ceasornic. Fiindcă $OB = y$, construcţia este imposibilă, dacă S_2 nu conţine puncte situate la distanţa y de punctul O.

Este evident, în continuare, că $OO' = z$ aşa că pentru existenţa triunghiului este necesar ca $z - x \leqslant y \leqslant z + x$ sau $z \leqslant x + y$ şi $y \leqslant z + x$ (pe baza faptului că $x \leqslant y$ rezultă însă $x \leqslant y + z$).

Reciproc, dacă $z \leqslant x + y$ şi $y \leqslant z + x$ (şi de asemenea $x \leqslant \leqslant y + z$), vor exista un punct sau chiar două puncte pe S_2 (fig. 84), la distanţa y de punctul O, şi alegînd oricare dintre ele drept punct B, se obţine punctul A prin rotirea lui CB cu 60° în sensul acelor de ceasornic.

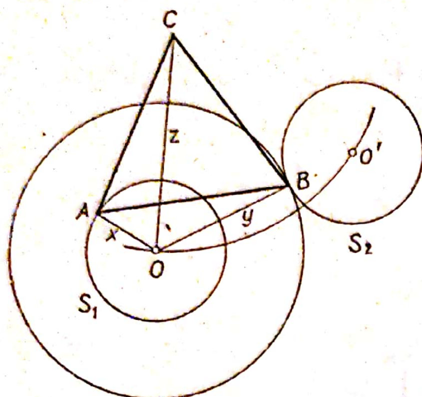


Fig. 84

178. Întrucît $\sqrt{2}$ este număr iraţional, numărul $\{10^n\sqrt{2}\}$ va fi de asemenea iraţional pentru orice n natural. Zecimalele de orice ordin ale unui număr iraţional sînt unic determinate. Fie d_n cea de a n-a zecimală din dezvoltarea lui $\sqrt{2}$ şi în consecinţă $\{10^n\sqrt{2}\} = 0, d_{n+1}d_{n+2} \ldots$

Se presupune că $\{10^p\sqrt{2}\} = \{10^q\sqrt{2}\}$ $(p \neq q)$. Pe baza unicităţii zecimalelor de orice ordin ale unui număr iraţional, egalitatea este satisfăcută dacă şi numai dacă

$$d_{n+p} = d_{n+q} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Rezultă că dezvoltarea zecimală a lui $\sqrt{2}$ este periodică cu perioada $|p - q|$, ceea ce contrazice iraţionalitatea lui $\sqrt{2}$.

179. Direcţiile fixe date se iau ca axe de coordonate, iar ora 9,00 se ia ca moment de referinţă, unitatea de timp considerîndu-se de 5 minute. La momentul t vapoarele au coordonatele $(x - v_1t, 0)$ şi respectiv $(0, y - v_2t)$, prin v_1 şi v_2 fiind notate vitezele celor două vapoare.

Pătratul distanţei dintre cele două vapoare la momentul t este

$$S^2 = (x - v_1t)^2 + (y - v_2t)^2 - 2(x - v_1t)(y - v_2t)\cos\alpha,$$

adică $S^2 = a + 2bt + ct^2$ este dat de un trinom de gradul al doilea în variabila t. Din condiţiile problemei se obţine sistemul

$$\begin{cases} a = 400, \\ a + 14b + 49c = 225, \\ a + 22b + 121c = 169, \end{cases}$$

ceea ce conduce la valorile $a = 400$, $b = -16$, $c = 1$ şi deci

$$S^2 = t^2 - 32t + 400 = (t - 16)^2 + 144.$$

Cea mai mică valoare a acestui trinom este $S_0^2 = 144$ dacă $t = 16$. În consecință, la ora 10 și 20 minute distanța între vapoare va fi minimă și egală cu 12 mile.

180. Fie $n + 1, n + 2, \ldots, n + p - 1$ numerele întregi succesive care satisfac condiția din enunț. Aplicînd formula sumei termenilor unei progresii aritmetice, se găsește

$$S^{(1)} = \frac{(2n + p)(p - 1)}{2}. \tag{1}$$

Se calculează suma pătratelor acestor numere:

$$S^{(2)} = \sum_{k=1}^{p-1} (n + k)^2 = (p - 1)n^2 + 2n \sum_{k=1}^{p-1} k + \sum_{k=1}^{p-1} k^2$$

și prin folosirea formulei care dă suma primelor k pătrate din șirul numerelor naturale se găsește

$$S^{(2)} = \frac{p - 1}{6}(6n^2 + 6np + 2p^2 - p). \tag{2}$$

Raportul relațiilor (1) și (2) va fi

$$\frac{S^{(2)}}{S^{(1)}} = \frac{6n^2 + 6np + 2p^2 - p}{3(2n + p)} = n + \frac{p}{2} + \frac{(p - 2)p}{6(2n + p)}. \tag{3}$$

Pentru ca raportul să fie exprimat de un număr întreg, este necesar și suficient ca

$$\frac{(p - 2)p}{6(2n + p)} = \frac{2m + 1}{2}. \tag{4}$$

Rezultă astfel că $p^2 - 2p = 12mn + 6mp + 6n + 3p$, adică

$$p(p - 5) = 6(2mn + mp + n). \tag{5}$$

Fiindcă membrul al doilea al egalității (5) este un număr întreg, iar p este un număr prim, $p - 5$ este divizibil la 6, adică $p - 5 = 6l$ sau

$$p = 6l + 5. \tag{6}$$

Se arată că pentru orice număr prim p se poate determina un număr natural n astfel ca numerele $n+1, \ldots,$ să fie cele căutate. Prin înlocuirea relației (6) în relația (4) se obține

$$\frac{(6l+3)(6l+5)}{6(2n+6l+5)} = \frac{2m+1}{2} \quad \text{sau} \quad \frac{(2l+1)(6l+5)}{2(2n+6l+5)} = \frac{2m+1}{2}.$$

Se observă deci că, luînd pe m, de exemplu, egal cu zero, n există și este egal cu $n = l(6l+5)$.

181. Fie n puncte din spațiu care satisfac condiția din enunț. Oricare din unghiurile avînd vîrfurile în aceste puncte va fi sau mai mare decît 120° sau mai mic decît 60°.

În prealabil se va demonstra lema care urmează.

Lemă. Există numai două puncte printre cele date, astfel ca distanța între acestea este maximă, iar fiecare din unghiurile cu vîrfurile în cele două puncte este mai mic decît 60°.

Fie punctele B și C între care distanța este maximă. Atunci pentru orice punct A_i diferite de B și C, $\sphericalangle BA_iC > 120°$, deoarece va fi unghiul cel mai mare în ΔBA_iC. Pe de altă parte, pentru orice puncte A_i, A_j (fig. 85), $\sphericalangle A_jBC < 60°$ și $\sphericalangle A_iBC < 60°$. Orice unghi plan al unui unghi triedru este mai mic decît suma celorlalte două unghiuri plane. În consecință,

$$\sphericalangle A_iBA_j < \sphericalangle A_iBC + \sphericalangle A_jBC < 60° + 60° = 120°,$$

adică $\sphericalangle A_iBA_j < 120°$, și deci $\sphericalangle A_iBA_j < 60°$.

Afirmația din enunț va fi demonstrată prin inducție completă și anume se va arăta că dacă B și C sînt punctele cele mai îndepărtate unul față de celălalt dintre cele n puncte date, se poate face o numerotare a tuturor punctelor astfel ca $\sphericalangle A_iA_jA_k > 120°$ pentru toți indicii $1 < i < j < k \leqslant n$, iar $A_1 \equiv B$, $A_n \equiv C$.

Propoziția este adevărată pentru $n = 3$. Se presupune că propoziția este adevărată pentru m puncte și se va arăta că este adevărată și pentru $m+1$ puncte. Se aleg dintre cele $m+1$ puncte două care sînt cele mai îndepărtate unul față de celălalt, fie acestea B și C. Punctul C se notează A_{m+1} și nu va fi luat pentru moment în considerare. Punctul celălalt extrem, B, se află printre cele care au rămas. Toate unghiurile cu vîrful în B sînt mai mici decît 60°. Conform presupunerii făcute la inducție acestea se pot numerota astfel ca $A_1 \equiv B$ și $\sphericalangle A_iA_jA_k > 120°$ pentru toți indicii $1 \leqslant i < j < k \leqslant m$. Se arată, în continuare, că $\sphericalangle A_iA_jA_{m+1} > 120°$ pentru

toţi indicii $1 \leqslant i < j \leqslant m$. Afirmaţia este adevărată pentru $i = 1$, fiindcă punctele A_1 şi A_{m+1} sînt cele mai îndepărtate.

Fie $1 < i < j \leqslant m$. În acest caz $\sphericalangle A_iA_jA_{m+1} > 120°$ deoarece în triunghiul $A_iA_jA_{m+1}$ unghiul din vîrful A_{m+1} este mai mic decît $60°$.

Unghiul $A_jA_iA_{m+1}$ (fig. 86) este de asemenea mai mic decît $60°$, deoarece dacă acest unghi ar fi mai mare decît $120°$, ţinînd seama că $\sphericalangle A_1A_iA_{m+1} > 120°$ (deoarece punctele A_1 şi A_{m+1} sînt cele mai îndepărtate unul de celălalt) s-ar deduce conform ipotezei de la inducţie că fiecare din unghiurile plane ale unghiului triedru cu vîrful în A_i ar fi mai mare decît $120°$, ceea ce nu este posibil. Propoziţia este astfel complet demonstrată.

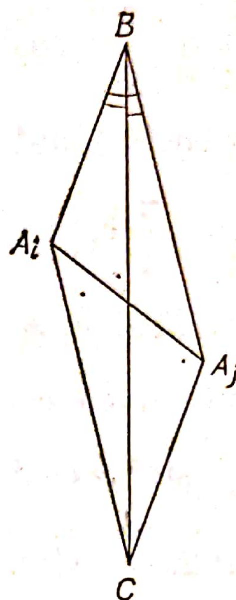


Fig. 85



Fig. 86

182. Fie punctul arbitrar P_j. Deoarece cinci segmente de dreaptă au acelaşi punct iniţial P_j, cel puţin trei dintre acestea au aceeaşi culoare, pe exemplu P_1P_2, P_1P_3, P_1P_4 au toate culoarea albă. Dacă cel puţin unul din segmentele P_2P_3, P_3P_4, P_4P_2 este alb, de exemplu P_2P_3, rezultă că $\Delta P_1P_2P_3$ este alb. Dacă toate aceste segmente sînt negre, şi $\Delta P_2P_3P_4$ este negru.

183. Se demonstrează că nici un număr x de forma $x = 8n + 7$ nu poate fi scris sub forma $x = a^3 + b^3 + c^3$. Se vor examina diferitele parităţi ale numerelor a, b, c.

1) Dacă a, b, c sînt toate numere pare, x va fi de asemenea număr par.

2) Dacă unul din numerele a, b, c este par, iar celelalte două sînt numere impare, x va fi număr par.

3) Dacă două din numerele a, b, c sînt numere pare, iar al treilea număr este impar (de exemplu $a = 2j$, $b = 2k$, $c = 2l + 1$) se obţine că $x = 4(j^2 + k^2 + l^2 + l) + 1$, ceea ce înseamnă că x are fie forma $x = 8n + 1$, fie forma $x = 8n + 5$.

4) Dacă a, b, c sînt toate numere impare, se găseşte

$$x = (2j + 1)^2 + (2k + 1)^2 + (2l + 1)^2 =$$

$$= 4j(j + 1) + 4k(k + 1) + 4l(l + 1) + 3 = 8n + 3.$$

În acest fel au fost examinate toate cazurile posibile.

184. Numărul real x_0 $\left(0 < x_0 < \frac{\pi}{2}\right)$ este soluţie a acestei ecuaţii numai dacă este soluţie a uneia dintre următoarele trei ecuaţii:

$$\sin^4 x - \cos^4 x = \lambda(\operatorname{tg}^4 x - \operatorname{ctg}^4 x), \tag{1}$$

$$\sin^4 x - \cos^4 x = \lambda \frac{\sin^8 x - \cos^8 x}{\sin^4 x \cdot \cos^4 x}, \tag{2}$$

$$(\sin^4 x - \cos^4 x)[\sin^4 x \cos^4 x - \lambda(\sin^4 x + \cos^4 x)] = 0. \tag{3}$$

Rezultă că $x = \frac{\pi}{4}$ este soluţie a ecuaţiei (1) indiferent de valoarea λ şi că numărul $x_0 \neq \frac{\pi}{4}$ $\left(0 < x_0 < \frac{\pi}{2}\right)$ este soluţie a ecuaţiei (1) dacă şi numai dacă este soluţie a ecuaţiilor:

$$\sin^4 x \cos^4 x = \lambda(\sin^4 x + \cos^4 x), \tag{4}$$

$$\frac{1}{16}\sin^4 2x = \lambda[(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x], \tag{5}$$

$$\frac{1}{16}\sin^4 2x = \lambda\left(1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x\right), \tag{6}$$

$$\sin^4 2x + 8\lambda \sin^2 2x - 16\lambda = 0. \tag{7}$$

Numărul $x_0 \neq \frac{\pi}{4}$ $\left(0 < x_0 < \frac{\pi}{2}\right)$ este soluţie a ecuaţiei (7) în cazul cînd numărul $z_0 = \sin^2 2x_0$ este soluţie a ecuaţiei

$$z^2 + 8\lambda z - 16\lambda = 0, \tag{8}$$

cu condiţia $0 < z_0 < 1$. Fiecărei astfel de soluţii a ecuaţiei (8) îi corespund două şi numai două soluţii ale ecuaţiei (7) astfel ca $0 < x_0 < \frac{\pi}{2}$, $x_0 \neq \frac{\pi}{4}$.

Ecuaţia (8) admite soluţii reale dacă şi numai dacă discriminantul său $\Delta = 16\lambda^2 + 16\lambda = 16\lambda(\lambda + 1) \geqslant 0$, adică fie $\lambda \geqslant 0$, fie $\lambda \leqslant -1$.

Cele două soluţii au în acest caz forma

$$z_1 = 4(\sqrt{\lambda(\lambda+1)} - \lambda) \text{ şi } z_2 = -4\sqrt{(\lambda(\lambda+1)} + \lambda).$$

Pe intervalul $(-1, 0)$ ecuaţia (8) nu are soluţii reale.

Dacă $\lambda \geqslant 0$, soluţia z_2 a ecuaţiei (8) este totdeauna negativă şi din această cauză nu este soluţie a ecuaţiei (7). Soluţia z_1 satisface inegalităţile $0 < z_1 < 1$ numai dacă $\sqrt{\lambda(\lambda+1)} < \frac{1}{4} + \lambda$, adică pentru $\lambda < \frac{1}{8}$. În acest caz ecuaţia (7) are două soluţii, deci ecuaţia iniţială (1) are trei soluţii.

Dacă $\lambda = \frac{1}{8}$, ecuaţia (1) are rădăcina triplă $x = \frac{\pi}{4}$.

În cazul cînd $\lambda > \frac{1}{8}$ ecuaţia (7) nu are soluţii reale.

Dacă, în fine, $\lambda \leqslant -1$, soluţiile z_1 şi z_2 ale ecuaţiei (8) au acelaşi semn fiindcă $z_1 z_2 = -16\lambda > 0$.

Soluţia z_1 este totdeauna negativă sau $z_1 > 0$ pentru $\lambda > -\frac{1}{4}$, ceea ce nu este compatibil cu condiţia $\lambda \leqslant -1$. Înseamnă că şi soluţia z_2 este negativă. De aceea în cazul $\lambda \leqslant -1$ ecuaţia (7) nu are soluţii reale.

Astfel nu se realizează niciodată situaţiile a) şi c) din enunţ.

Situaţia b) se întîlneşte cînd $\lambda \leqslant 0$ şi $\lambda \geqslant \frac{1}{8}$.

Situaţia d) se întîlneşte cînd $0 < \lambda < \frac{1}{8}$.

185. $1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{n^3} < 1 + \frac{1}{2^3-2} + \frac{1}{3^3-3} + \ldots$

$$\ldots + \frac{1}{n^3-n} = 1 + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{(n-1)\,n(n+1)} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3} - \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{(n-1)n} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{n(n+1)}\right] = 1 + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{n(n+1)}\right] = \frac{5}{4} - \frac{1}{2n(n+1)} < \frac{5}{4}.$$

186. Cele 4000 de puncte date determină 7 998 000 segmente de diferite direcţii, ale căror extremităţi sînt punctele date. Prin urmare, aceste segmente sînt în număr finit. Se notează cu d maximul lun-

gimii acestor segmente, maxim care, evident, există. Atunci cercul de rază $d + 1$ şi avînd centrul în oricare din punctele date conţine toate celelalte puncte.

Se consideră o tangentă la acest cerc astfel încît direcţia sa să nu coincidă cu nici una dintre cele 7 998 000 direcţii puse în evidenţă mai sus (unele puncte determinînd segmente de aceeaşi direcţie, numărul total al direcţiilor poate fi mai mic decît cel al segmentelor). O astfel de tangentă există, iar punctele date sînt situate toate de o parte a acestei tangente.

Se consideră o dreaptă care se deplasează paralel cu această tangentă, astfel ca punctele date să treacă unul cîte unul de cealaltă parte a acestei drepte. Dacă se fixează poziţia acestei drepte după parcurgerea a cîte patru puncte dintre cele date, se obţin 1000 de benzi paralele între ele, disjuncte şi conţinînd fiecare cîte patru puncte date. Patrulaterele determinate de cele patru puncte din fiecare bandă sînt cele a căror existenţă se cerea demonstrată.

187. Numai pe o singură latură a poligonului cu n laturi se află două vîrfuri ale poligonului cu $n + 1$ laturi. Această latură (fig. 87) va fi astfel împărţită în trei segmente, dintre care cel din mijloc, de lungime a va fi latură a poligonului cu $n + 1$ laturi. Fie $x_2^{(1)}$ şi $x_1^{(1)}$ lungimile celorlalte două segmente, iar b lungimea laturii poligonului cu n laturi. Se va nota, de asemenea, lungimea segmentelor determinate pe latura i a poligonului cu n laturi de către vîrful i al poligonului cu $n + 1$ laturi, prin $x_1^{(i)}$ şi, respectiv, $x_2^{(i)}$. Se obţine în acest fel

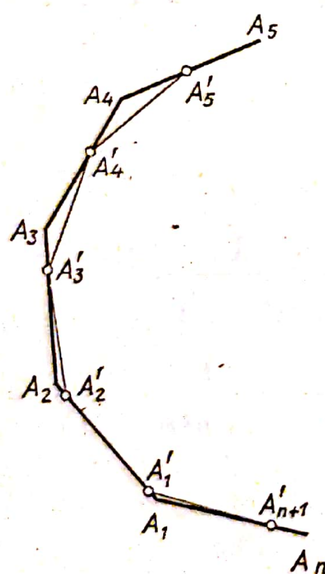


Fig. 87

$$\begin{aligned} x_2^{(1)} + x_1^{(2)} &= a, \\ x_2^{(2)} + x_1^{(3)} &= a, \\ &\cdots\cdots \\ x_2^{(n-1)} + x_1^{(n)} &= a, \end{aligned} \qquad (1)$$

$$x_1^{(i)} + x_2^{(i)} = b, \quad i = 2, 3, \ldots, n, \qquad (2)$$

$$x_1^{(1)} + a + x_2^{(1)} = b.$$

Rezultă că $a = \dfrac{n}{n+1} b$. Dacă se notează $x_2^{(1)} = x$, din relaţia (1) se găseşte că $x_1^{(2)} = \dfrac{n}{n+1} b - x$, şi apoi din relaţiile (1) şi (2) se

exprimă ca funcţii polinom de gradul întîi în x toţi $x_k^{(i)}$ $(i = 2, 3, \ldots$ $\ldots, n;\ k = 1, 2)$:

$$x_1^{(i)} = \frac{n-i+2}{n+1} b - x,$$

$$x_2^{(i)} = \frac{i-1}{n+1} b + x, \qquad i = 2, 3, \ldots, n,$$

$$x_2^{(1)} = \frac{b}{n+1} - x.$$

Se deduce din aceste relaţii dubla inegalitate $0 \leqslant x \leqslant \frac{b}{n+1}$. Diferenţa ariilor celor două poligoane este dată de suma ariilor triunghiurilor decupate de laturile poligonului cu $n+1$ laturi din poligonul cu n laturi, fiind

$$S(x) = \frac{1}{2} \sin \varphi \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i-1}{n+1} b + x\right)\left(\frac{n-i+1}{n+1} b - x\right). \qquad (3)$$

Funcţia $S(x)$ este un trinom de gradul al doilea în x. Coeficientul dominant fiind -1, funcţia S este definită pe segmentul $\left[0, \frac{b}{n+1}\right]$, iar $S(0) = S\left(\frac{b}{n+1}\right)$ şi, prin urmare, $S\left(\frac{b}{2n+2}\right)$ va fi valoarea maximă iar $S(0) = S\left(\frac{b}{n+1}\right)$ va fi valoarea minimă a funcţiei.

Fie Q aria poligonului regulat cu n laturi, iar R aria poligonului cu $n+1$ laturi. Este evident că $R(x) = Q - S(x)$ şi deci aria poligonului cu $n+1$ laturi este maximă în cazul cînd valoarea $S(x)$ este minimă şi egală cu $S(0)$, deci cînd unul din vîrfurile poligonului cu $n+1$ laturi coincide cu un vîrf al poligonului cu n laturi. Aria $R(x)$ este minimă cînd funcţia S ia valoarea maximă şi anume $S\left(\frac{b}{2n+2}\right)$, în cazul cînd mijlocul unei laturi a poligonului cu $n+1$ laturi coincide cu mijlocul unei laturi a poligonului cu n laturi.

188. Se notează:

$$\left\{\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 &= y_1, \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 &= y_2, \\ -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 &= y_3, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - x_5 &= y_4, \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + x_5 &= y_5. \end{aligned}\right. \qquad (1)$$

Numerele y_i vor fi, la fel ca şi x_i, numere întregi pozitive, iar

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1000. \qquad (2)$$

Din relaţiile (1) rezultă

$$\left\{\begin{aligned} 2x_1 &= y_1 + y_2, \\ 2x_2 &= y_2 + y_3, \\ 2x_3 &= y_3 + y_4, \\ 2x_4 &= y_4 + y_5, \\ 2x_5 &= y_5 + y_1. \end{aligned}\right. \qquad (3)$$

Se deduce din aceste ultime relaţii că numerele y_i au aceeaşi paritate, şi deoarece $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 1000$, înseamnă că sînt pare.

Din relaţiile (3) şi (2) se găseşte

$$x_1+x_3=\frac{1}{2}(y_1+y_2+y_3+y_4)=\frac{1}{2}(1000-y_5),\ x_2+x_4=\frac{1}{2}(1000-y_1).$$

Puterea dată în enunţ va fi maximă atunci cînd y_1 şi y_5 vor fi minime, adică în cazul cînd $y_1 = y_5 = 2$. În consecinţă

$$\max(x_1 + x_3)^{x_2+x_4} = \max\left[\frac{1}{2}(1000 - y_5)\right]^{\frac{1}{2}(1000-y_1)} = 499^{499}.$$

Se calculează în continuare, în cîte moduri distincte se pot alege numerele întregi pozitive y_2, y_3, y_4 astfel ca $y_2 + y_3 + y_4 = 996$, $y_2 = 994 - 2k$ $(k = 1, 2, \ldots, 496)$. Se găseşte $y_3 + y_4 = 2k + 2$, deci

$y_3 = 2, 4, \ldots, 2k$, în total k posibilități. Din această cauză numărul cerut de enunț este

$$\sum_{k=1}^{496} k = \frac{1}{2} 496 \cdot 497 = 123\ 256.$$

Răspuns: 123 256 moduri.

189. Fie $A_{n-1}A_0$ o porțiune pe care trenul o parcurge în sensul acelor de ceasornic, iar în punctul A_0 începe să se miște în sens contrar (fig. 88). Celelalte puncte în care se produce schimbarea sensului de mișcare vor fi $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_n \equiv A_0$. Este evident că există un număr cu soț de schimbări ale sensului de parcurgere și deci numărul n este par.

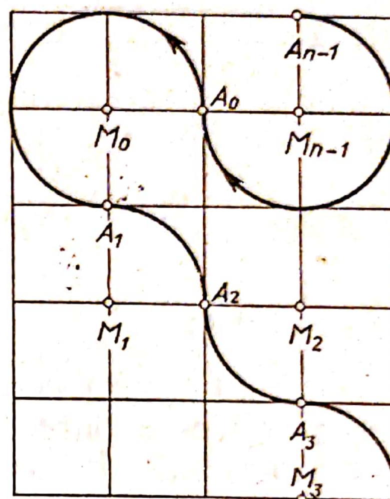


Fig. 88

Se notează respectiv cu $M_n \equiv M_0, M_1, \ldots, M_{n-1}$ centrele arcelor $A_0A_1, A_1A_2, \ldots, A_{n-1}A_n$. Punctele $M_0, M_2, M_4, \ldots$ se află în interiorul rețelei, iar $M_1, M_3, M_5, \ldots$ în afara rețelei. În caz contrar se va modifica numerotarea cu o unitate. Se alege un sistem rectiliniu și rectangular de coordonate astfel ca A_0 să fie originea, tangenta în A_0 la arcul de cerc A_0A_1 să fie axa Ox, iar diametrul arcelor se ia drept unitate. Fie a_i abscisele punctelor A_i și m_i abscisele punctelor M_i.

Oricare ar fi arcul A_iA_{i+1}, diferența $a_i - a_{i+1}$ va fi sau $\frac{1}{2}$ sau $-\frac{1}{2}$, după cum arcul este format dintr-un sfert sau din trei sferturi de cerc. În cazul în care arcul este format din o jumătate de cerc, diferența $a_i - a_{i+1}$ este 0, 1 sau -1.

Deoarece A_i și A_{i+1} sînt mijloacele segmentelor M_iM_{i-1} și M_iM_{i+1} respectiv,

$$a_i = \frac{m_i + m_{i-1}}{2}, \quad a_{i+1} = \frac{m_{i+1} + m_i}{2}.$$

Se obține în acest fel $m_i + m_{i-1} = 2a_i$, $m_i + m_{i+1} = 2a_{i+1}$ și $m_{i-1} - m_{i+1} = 2(a_i - a_{i+1})$, ceea ce arată că diferența considerată este pară cînd arcul A_iA_{i+1} este format dintr-o jumătate de cerc și ± 1, în cazul cînd diferența este formată dintr-un număr impar de sferturi de cerc. Fie suma

$$(m_0 - m_2) + (m_2 - m_4) + \ldots + (m_{n-2} - m_n) = 0. \quad (1)$$

Deoarece drumul este închis, $m_n = m_0$. Dèoarece fiecare termen din suma (1) este fie 0, fie ± 2, fie ± 1, înseamnă că suma conține un număr par de ± 1, ceea ce arată că numărul de sferturi de cerc pe care trenul le parcurge în sens direct este par.

Dacă se scrie suma

$$(m_1 - m_2) + (m_3 - m_5) + \ldots$$
$$\ldots + (m_{n-1} - m_{n+1}) = 0,$$

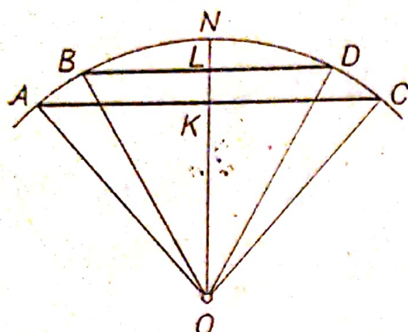


Fig. 89

se obține, în mod analog, ținînd seama că $m_{n+1} = m_1$, paritatea numărului de sferturi de cerc pe care trenul le parcurge în sens contrar sensului acelor de ceasornic.

Deoarece rețeaua de linii ferate este închisă, revenind în punctul inițial, trenul a parcurs un circuit complet, de aceea diferența între numărul sferturilor de cerc parcurse în sensul acelor de ceasornic și numărul celor parcurse în sens contrar este 4, ceea ce arată că fiecare dintre aceste numere pare dau același rest la împărțirea cu 4, acesta fiind 0 sau 2, deci suma lor este multiplu de 4, ceea ce se cerea.

190. Poligoanele regulate avînd n, respectiv $n+1$ laturi se așază astfel ca apotemele $h_n = OK$ și $h_{n+1} = OL$ care corespund laturilor AC și BD să fie situate pe aceeași rază ON. Atunci KL va fi proiecția coardei AB pe raza ON. Pe arcul BN a cărui mărime este $\dfrac{180°}{n+1}$ se pot așeza n arce egale cu arcul AB, a cărui mărime este $\dfrac{180°}{n(n+1)}$. Proiecțiile pe ON ale coardelor care subîntind aceste arce vor fi mai mici decît proiecția KL a arcului AB. De aceea suma LN a acestor proiecții va fi mai mică decît $n \cdot KL$, deci $R - h_{n+1} < n(h_{n+1} - h_n)$, sau $(n+1)h_{n+1} - nh_n > R$.

191. 1) Fie x_1, x_2, x_3 lungimile laturilor triunghiului. Se deosebesc următoarele cazuri:

1′) $x_1 = x_3 \neq x_2$. Din inegalitatea triunghiului rezultă că

$$2x_1 > x_2. \tag{1}$$

1″) $x_2 = x_3 \neq x_1$. Aplicînd din nou inegalitatea triunghiului se obține că $2x_2 > x_1$. (2)

2) $x_1 = x_2 = x_3$.

Cazurile 1′ și 1″ se obțin cînd $a^2 - 4ab > 0$. (3)

Fie $x_1 = \frac{a}{2} - \frac{\sqrt{a^2 - 4b}}{2}$ și $x_2 = \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{a^2 - 4b}}{2}$.

Se verifică inegalitatea (1):

$$a - \sqrt{a^2 - 4b} > \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{a^2 - 4b}}{2},$$

deci $a^2 < \frac{36}{8} b$, relație care, completată cu (3), devine $4b < a^2 < \frac{36}{8} b$.

În cazul 1″ inegalitatea (1) este totdeauna satisfăcută.

Din teorema sinusurilor se obține

$$\frac{\sin \alpha_1}{x_1} = \frac{\sin \alpha_2}{x_2} = \frac{\sin \alpha_3}{x_3} = \frac{1}{2R}.$$

În cazul 1′, $\sin \alpha_1 = \frac{x_1}{2R}$, $\cos \alpha_1 = \frac{x_2}{2x_1}$. Rezultă astfel că $R = \frac{x_1^2}{\sqrt{4x_1^2 - x_2^2}}$ sau $R = \frac{(a - \sqrt{a^2 - 4b})^2}{2\sqrt{(3a - \sqrt{a^2 - 4b})(a - 3\sqrt{a^2 - 4b})}}$ iar în cazul 1″ R va avea forma

$$R = \frac{(a^2 + \sqrt{a^2 - 4b})^2}{2\sqrt{(3a - \sqrt{a^2 - 4b})(a + 3\sqrt{a^2 - 4b})}}.$$

Dacă $a^2 - 4b = 0$, $x_1 = x_2 = x_3 = \frac{a}{2}$. În consecință triunghiul este echilateral, iar $R = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

192. Dacă m și $n \neq m$ sînt numere întregi, numărul $f(m) - f(n)$ este multiplu de $m - n$. Dacă numărul întreg m este diferit de k, $k + 1$, $k + 2$, numerele

$$f(m) - f(k),\ f(m) - f(k+1),\ f(m) - f(k+2) \qquad (1)$$

sînt divizibile respectiv cu

$$m - k,\ m - (k+1),\ m - (k+2). \qquad (2)$$



Numerele care constituie tripletul (2) sînt numere întregi consecutive, deci unul dintre acestea este multiplu de 3, ceea ce înseamnă că şi unul din numerele (1) este de asemenea multiplu de 3, deci $f(m)$ va fi multiplu de 3.

193. a) Se presupune că $x_3 = 1$. În acest caz

$$x_1x_2 = x_1x_2x_3 > 1, \tag{1}$$

$$x_1 + x_2 < \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \text{ sau } x_1 + x_2 < \frac{1}{x_1x_2}(x_1 + x_2).$$

Deoarece $x_1 + x_2 > 0$, rezultă $x_1x_2 < 1$, ceea ce, conform relaţiei (1), nu este posibil.

b) Din presupunerea $x_1 > 1$, $x_2 > 1$, $x_3 > 1$ rezultă că $x_1 + x_2 + x_3 > \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}$, ceea ce contrazice a doua condiţie din enunţ.

c) Fie $x_3 < 1$. Din inegalităţile $x_1x_2x_3 > 1$, $x_3 < 1$ se deduce

$$x_1x_2 > 1. \tag{2}$$

Cu ajutorul relaţiei (2) se va arăta că $x_1 > 1$ şi $x_2 > 1$. Relaţiile $x_1x_2x_3 > 1$ şi $x_1 + x_2 + x_3 < \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}$ implică

$$x_3 > \frac{1}{x_1x_2} \text{ sau } \frac{1}{x_3} < x_1x_2.$$

$$\frac{1}{x_1x_2} + x_1 + x_2 < x_1 + x_2 + x_3 < \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} < \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + x_1x_2,$$

$$\frac{1}{x_1x_2} + x_1 + x_2 < \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + x_1x_2.$$

Deoarece $x_1x_2 > 0$, se găsesc relaţiile

$$\begin{gathered} 1 + (x_1 + x_2)x_1x_2 < x_1 + x_2 + (x_1x_2)^2, \\ (1 - x_1x_2)(1 + x_1x_2) - (x_1 + x_2)(1 - x_1x_2) < 0. \end{gathered} \tag{3}$$

Împărţind relaţia (3) prin $1 - x_1x_2 < 0$, se obţin

$$1 + x_1x_2 - x_1 - x_2 > 0, \; (x_1 - 1)(x_2 - 1) > 0,$$

deci $x_1 > 1$ şi $x_2 > 1$ ($x_1 < 1$ şi $x_2 < 1$ este imposibil), ceea ce trebuia demonstrat.

194. Se presupune că punctul O se află la o depărtare mai mică decît 100 m de latura AB sau de prelungirea sa (fig. 90). Fie k cercul de rază 2 (unitatea de lungime se alege egală cu 100 m) şi avînd centrul în punctul O, iar P este proiecţia punctului O pe dreapta AB, $OP < 1$. Punctele A', B', C', D', E' sînt intersecţiile semidreptelor PA, PB, PC, PD şi PE cu cercul k.

Se va demonstra că $S'_{A'B'C'D'E'} < 5\sqrt{3}$. Dacă se introduc notaţiile

$$\sphericalangle A'OB' = \omega, \quad \sphericalangle B'OC' = \omega_1, \quad \sphericalangle C'OD' = \omega_2,$$
$$\sphericalangle D'OE' = \omega_3, \quad \sphericalangle E'OA' = \omega_4 \quad (\omega_i < 180°),$$

se găseşte că

$$S' - S_{\Delta A'OB'} = 2(\sin\omega_1 + \sin\omega_2) + 2(\sin\omega_3 + \sin\omega_4) \leqslant 4\sin\frac{\omega_1+\omega_2}{2} +$$

$$+ 4\sin\frac{\omega_3+\omega_4}{2} \leqslant 8\sin\frac{\omega_1+\omega_2+\omega_3+\omega_4}{4}, \quad S' - S_{\Delta A'OB'} \leqslant 8\cos\frac{\omega}{4}.$$

Deoarece $OB' = 2$, înseamnă că $\frac{2\pi}{3} < \omega < \pi$ şi, evident,

$$S' - S_{\Delta A'OB'} < 4\sqrt{3}, \quad S_{\Delta A'OB'} < \sqrt{3}.$$

Rezultă astfel că $S' < 5\sqrt{3}$, ceea ce contrazice enunţul, şi în consecinţă distanţa pînă la orice latură nu este mai mică decît 1. Egalitatea are loc dacă $\omega = 120°$, $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = 60°$, adică în cazul cînd pentagonul $ABCDE$ se obţine dintr-un hexagon regulat prin eliminarea unuia din vîrfuri (fig. 91).

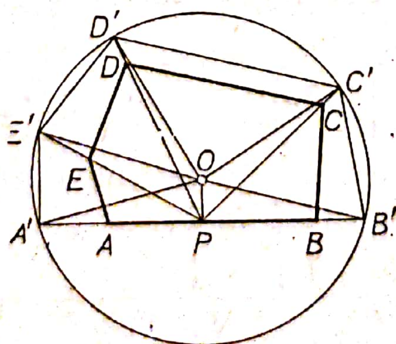


Fig. 90

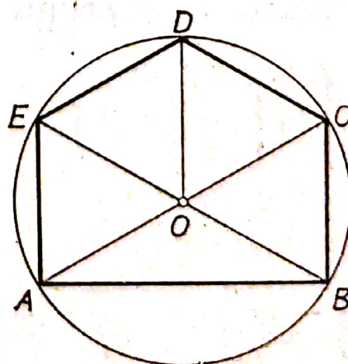


Fig. 91

195. Fie $k_1 \geqslant \left[\frac{k}{n}\right]$, $k_2 \geqslant \left[\frac{k}{n}\right]$, ..., $k_p \geqslant \left[\frac{k}{n}\right]$,

$$k_{p+1} < \left[\frac{k}{n}\right], \; k_{p+2} < \left[\frac{k}{n}\right], \ldots, k_n < \left[\frac{k}{n}\right].$$

1) Dacă $p = n$, proprietatea cerută este evidentă. Dacă $p = 0$, s-ar obține $k = k_1 + k_2 + \ldots + k_n < n\left[\frac{k}{n}\right] \leqslant k$, ceea ce ar fi imposibil.

2) Fie $0 < p < n$. În acest caz există numerele întregi nenegative $l_1, l_2, \ldots, l_p$ astfel încît

$$k_i = \left[\frac{k}{n}\right] + l_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, p,$$

şi numerele întregi nenegative m_j astfel ca

$$k_j = \left[\frac{k}{n}\right] - m_j, \qquad j = p+1, p+2, \ldots, n,$$

şi, în consecinţă,

$$k = \sum_{j=1}^{n} k_j = n\left[\frac{k}{n}\right] + \sum_{i=1}^{p} l_i - \sum_{j=p+1}^{n} m_j.$$

Deoarece $n\left[\frac{k}{n}\right] \leqslant k$, se obține $\sum_{i=1}^{p} l_i \geqslant \sum_{j=p+1}^{n} m_j$. (1)

În continuare se exprimă $k_i\,!$ și $k_j\,!$ sub forma

$$k_i\,! = \left[\frac{k}{n}\right]!\left(\left[\frac{k}{n}\right]+1\right)\ldots\left(\left[\frac{k}{n}\right]+l_i\right), \qquad i = 1, 2, \ldots, p,$$

$$k_j\,! = \left(\left[\frac{k}{n}\right] - m_j\right)! = \frac{\left[\frac{k}{n}\right]!}{\left(\left[\frac{k}{n}\right]-m_j+1\right)\ldots\left(\left[\frac{k}{n}\right]-1\right)\left[\frac{k}{n}\right]}.$$

deci $k_1 ! \, k_2 ! \ldots k_n ! = \left(\left[\frac{k}{n}\right]!\right)^n \cdot \frac{A}{B}$. Prin A s-a notat produsul celor $\sum_{i=1}^{p} l_i$ factori care sînt mai mari decît $\left[\frac{k}{n}\right]$, iar prin B s-a notat produsul celor $\sum_{j=p+1}^{n} m_j$ factori nenegativi dintre care cel mai mare este $\left[\frac{k}{n}\right]$. Din (1) rezultă că $\frac{A}{B} \geqslant 1$ şi deci $k_1 ! \, k_2 ! \ldots k_n ! \geqslant \left(\left[\frac{k}{n}\right]!\right)^n$ $(k = k_1 + k_2 + \ldots + k)$, ceea ce se cerea demonstrat.

196. Fie numerele întregi x, y, z, astfel ca $x^3 + y^3 + z^3 = 1969^2$. Restul împărţirii lui 1969^2 la 9 este 4. Vor fi cercetate resturile care se obţin prin împărţirea la 9 a numerelor de forma x^3.

Cazul 1. $x = 3k$. Restul împărţirii lui x^3 la 9 va fi $r = 0$.

Cazul 2. $x = 3k + 1$. Atunci $x^3 = 3^3k^3 + 3 \cdot 3^2k^2 + 3 \cdot 3k + 1$. Restul considerat este $r = 1$.

Cazul 3. $x = 3k - 1$. Atunci $x^3 = 3^3k^3 - 3 \cdot 3^2k^2 + 3 \cdot 3k - 1$. Restul respectiv va fi $r = 8$.

Prin împărţirea numerelor x^3, y^3, z^3 la 9 se obţin resturile 0, 1 sau 8. Dacă se împarte la 9 suma $r_1 + r_2 + r_3$, cei trei termeni avînd valorile 0, 1 sau 8, nu se poate obţine niciodată restul 4, ceea ce demonstrează enunţul.

197. Dacă în ecuaţia dată se consideră $y = x$, se obţine

$$2xf(x) = 2xf^2(x),$$

deci dacă $x \neq 0$, atunci $f(x) = f^2(x)$, ceea ce atrage după sine fie $f(x) = 0$, fie $f(x) = 1$.

Dacă $f(a) = 0$ pentru $x = a = 0$, ecuaţia dată implică $af(y) = 0$, pentru oricare valoare a lui y, adică $f(x) \equiv 0$.

Dacă $f(a) = 1$ pentru $x = a \neq 0$, din ecuaţia dată se obţine că $y = yf(y)$, deci $f(y) = 1$ pentru $y \neq 0$, iar pentru $y = 0$, $f(0) = c$, c fiind un număr arbitrar.

Soluţiile ecuaţiei funcţionale date sînt deci $f(x) \equiv 0$ şi orice funcţie de forma $f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0, \\ c, & x = 0. \end{cases}$

Numai funcţiile $f(x) \equiv 0$ şi $f(x) \equiv 1$ dau rezolvarea problemei în funcţii continue.

198. Fie F unul din poligoanele convexe arbitrare. Se consideră mulţimea $\overline{F}$ de puncte care sînt situate la o distanţă care nu depăşeşte 1 cm cel puţin faţă de una din laturile poligonului. Dacă poligonul are n laturi, mulţimea $\overline{F}$ va conţine afară de punctele poligonului F, n dreptunghiuri ale căror baze vor fi laturile poligonului, iar înălţimile vor avea lungimea 1 cm şi n sectoare circulare de rază 1 cm avînd centrele în vîrfurile poligonului (v. problema 121).

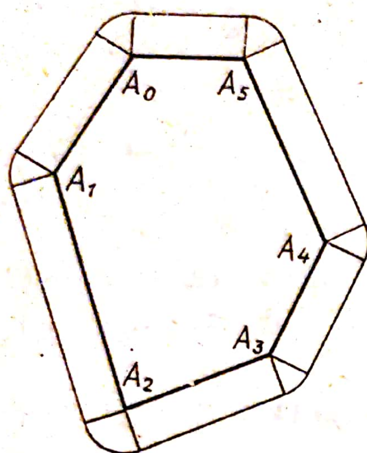


Fig. 92

Figura 92 descrie mulţimea $\overline{F}$ în cazul cînd F este un hexagon convex. Este evident că dacă un punct nu aparţine mulţimii $\overline{F}$, cercul avînd centrul în acest punct şi raza 1 cm nu va intersecta poligonul F.

Pentru a calcula aria figurii $\overline{F}$ se consideră poligonul convex F cu n laturi. Sectorul circular cu centrul în A_k va avea aria $\dfrac{\pi(180° - \alpha_k)}{360°}$, α_k fiind unghiul din vîrful A_k.

Dacă se adună ariile tuturor sectoarelor, se găseşte

$$\frac{\pi}{360°}[n\,180° - (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n)].$$

Deoarece suma unghiurilor unui poligon convex cu n laturi este $(n - 2) \cdot 180°$, suma ariilor tuturor sectoarelor circulare va fi π cm^2. Pe de altă parte, suma ariilor tuturor dreptunghiurilor va fi egală cu perimetrul P_F al poligonului.

Aria figurii $\overline{F}$ va fi, în final $S_{\overline{F}} = S_F + \pi + P_F$, S_F fiind aria poligonului F.

Fiindcă $S_{\overline{F}} \leqslant \pi$ şi $P_F \leqslant 2\pi$, prin enunţ, rezultă că

$$S_{\overline{F}} \leqslant \pi + \pi + 2\pi = 4\pi.$$

Mulţimea tuturor punctelor situate la distanţa de 1 cm de laturile pătratului dat şi în interiorul acestuia va fi dată de pătratul $\overline{K}$ avînd latura de lungime egală cu 36 cm.

Suma ariilor figurilor $\overline{F}$ care se obţin prin considerarea tuturor celor o sută de poligoane care se aşează peste pătratul $\overline{K}$ nu va depăşi 400 π, adică va fi mai mică decît 1260 cm^2, iar aria pătratului $\overline{K}$ este de 1296 cm^2.

Se găseşte astfel, evident, un punct situat faţă de laturile poligonului şi cele ale pătratului dat la o distanţă mai mare decît 1.

199. Un calcul simplu arată că raza sferei înscrise în tetraedrul regulat de înălțime 1 este $\frac{1}{4}$. Se va arăta că această sferă încape în orice tetraedru care nu are nici o înălțime mai mică decît 1. Este suficient pentru aceasta să se arate că locul geometric al punctelor interioare tetraedrului, situate la o distanță mai mare de $\frac{1}{4}$ de fețele sale, nu este format din mulțimea vidă. Un plan paralel cu una dintre fețe și aflat la o distanță de $\frac{1}{4}$ de această față separă din tetraedru mulțimea punctelor apropiate de fața respectivă la o distanță mai mică decît $\frac{1}{4}$. Rămîne astfel un tetraedru ale cărui înălțimi sînt toate mai mari sau egale cu $\frac{3}{4}$. Din acesta se separă o parte cu ajutorul unui plan paralel cu a doua față, la distanța 1/4 de aceasta. Rămîne un tetraedru ale cărui înălțimi sînt toate mai mari sau egale cu $\frac{1}{2}$ și cu care se procedează în continuare analog. Se obține astfel un tetraedru ale cărui înălțimi nu sînt mai mici decît $\frac{1}{4}$. În interiorul său se află un punct situat la o distanță de cea de a patra față care nu este mai mică decît $\frac{1}{4}$. Se observă că, prin construcție, acest punct nu se află la o distanță mai mică decît $\frac{1}{4}$ de celelalte fețe ale tetraedrului inițial. Înseamnă că acesta este punctul căutat, sfera de rază $\frac{1}{4}$ care îl are ca centru fiind inclusă în întregime în tetraedrul inițial.

Deoarece este evident că nu se poate așeza o sferă de rază mai mare decît $\frac{1}{4}$ într-un tetraedru regulat avînd înălțimea 1, raza maximă căutată este $\frac{1}{4}$.

200. Se notează unghiurile formate de semidreptele OX și OY, respectiv de semidreapta OZ cu planul OXY prin α, respectiv β

(fig. 93). Se obține, în urma unui calcul simplu, că volumul tetraedrului $OABC$ este

$$\frac{1}{6} OA \cdot OB \cdot OC \cdot \sin \alpha \sin \beta.$$

Aceasta înseamnă că pentru a găsi volumul minim este necesar ca planul de secțiune ABC să fie dus astfel ca produsul $OA \cdot OB \cdot OC$ să fie minim.

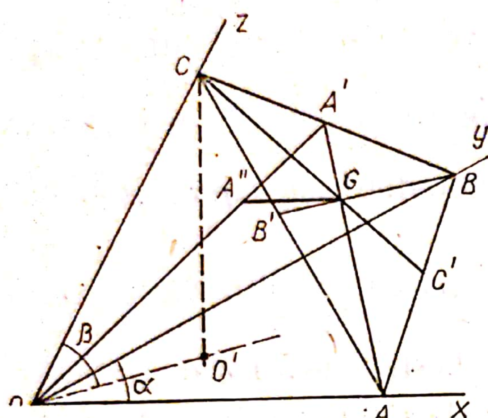


Fig. 93

Se prelungesc segmentele AG, BG și CG dincolo de punctul G pînă la intersecția laturilor BC, AC și AB în punctele A', B', respectiv C'. Prin punctul G se duce o dreaptă paralelă cu OA, care intersectează segmentul OA' în punctul A''. Se obține $\frac{OA}{GA''} = \frac{AA'}{GA'}$, adică $OA = \frac{AA'}{GA'} \cdot GA''$, unde GA'' este de lungimi constantă, independent de poziția punctelor A, B și C. Expresiile analoage se găsesc pentru OB și OC. Pentru a găsi minimul produsului $OA \cdot OB \cdot OC$ trebuie găsit minimul produsului $\frac{AA'}{GA'} \cdot \frac{BB'}{GB'} \cdot \frac{CC'}{GC'}$ sau maximul produsului $\frac{GA'}{AA'} \cdot \frac{GB'}{BB'} \cdot \frac{GC'}{CC'}$. Însă $\frac{GA'}{AA'} = \frac{S_{\Delta GBC}}{S_{\Delta ABC}}$, $\frac{GB'}{BB'} = \frac{S_{\Delta GAC}}{S_{\Delta ABC}}$, $\frac{GC'}{CC'} = \frac{S_{\Delta GAB}}{S_{\Delta ABC}}$. Efectuînd suma acestora, se găsește $\frac{GA'}{AA'} + \frac{GB'}{BB'} + \frac{GC'}{CC'} = 1$. Însă produsul a trei numere nenegative care au suma constantă este maxim cînd cele trei numere sînt egale între ele (cititorul este îndemnat să facă această demonstrație). Astfel, volumul tetraedrului $OABC$ este minim dacă

$$\frac{GA'}{AA'} = \frac{GB'}{BB'} = \frac{GC'}{CC'} = \frac{1}{3}.$$

Continuarea demonstrației se reduce la următoarea problemă binecunoscută de geometrie plană: prin punctul G aflat în interiorul

unghiului format de semidreapta OX cu dreapta de intersecţie a planelor OBC şi OXG se cere construit segmentul AA' astfel încît G să îl împartă într-un raport dat. Se găseşte astfel punctul A, iar punctele B şi C se obţin analog.

201. Se verifică uşor că numărul dat este soluţie a ecuaţiei $x^3 + 3x - 4 = 0$. Întrucît

$$x^3 + 3x - 4 = (x - 1)(x^2 + x + 4),$$

singura rădăcină reală a ecuaţiei este 1 şi, prin urmare, numărul dat este 1.

202. Proiectînd ortogonal cercul pe podea, se obţine o elipsă cu semiaxele 1 şi $\cos\theta$, θ fiind înclinarea planului cercului faţă de podea. Dacă punctul O materializează colţul respectiv, M este centrul cercului, iar M' proiecţia acestui centru pe podea, conform cu teorema lui Monge se scrie

$$M'O^2 = 1 + \cos^2\theta.$$

În afară de aceasta, $MM' = \sin\theta$, deci

$$OM^2 = 1 + \cos^2\theta + \sin^2\theta = 2,$$

ceea ce înseamnă că centrul M al cercului se află pe sfera de rază $\sqrt{2}$ cu centrul în O, de ecuaţie $x^2 + y^2 + z^2 = 2$. Centrul cercului nu poate fi însă mai îndepărtat de planele care formează colţul, decît raza cercului, adică 1, condiţii care se scriu în coordonate carteziene: $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$ şi $0 \leqslant z \leqslant 1$.

Se remarcă, în final, că toate punctele sferei de ecuaţie $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ care satisfac aceste condiţii intră în alcătuirea locului geometric căutat. Fie un z oarecare, $0 \leqslant z \leqslant 1$. Însă $z = \sin\theta$. Este evident că se poate realiza o astfel de înclinare a cercului pe planul podelei. Dacă se fixează $z = \sin\theta$, proiecţiile punctelor sferei (x, y, z) pe planul xOy în condiţiile $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$ formează un arc de cerc de ecuaţie $x^2 + y^2 = 1 + \cos^2\theta$, inclus în pătratul $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$. Punctele extreme ale acestui arc de cerc se găsesc pentru acele poziţii ale cercului în care axele elipsei dupa care se proiectează cercul pe podea sînt paralele cu axele Ox şi Oy. Punctele interioare ale acestui arc de cerc se obţin atunci cînd cercul trece continuu de la una din aceste poziţii la cealaltă.

203. Rezultă din aceste condiții că $\sphericalangle BAD \geqslant 90°$ (fig. 94). Dacă punctul A este situat în afara sferei pline K, unghiul sub care aceasta este văzută din A nu este mai mic decît $\sphericalangle BAD$. Se calculează fără dificultăți că $AO \leqslant r\sqrt{2}$, O fiind centrul sferei K iar r raza sa. În acest fel, mulțimea căutată de vîrfuri se găsește într-o sferă plină de rază $r\sqrt{2}$ și cu centrul în O. Se arată ușor că toate punctele acestei sfere aparțin mulțimii căutate. Pentru punctele care sînt situate în interiorul lui K afirmația este evidentă. În cazul cînd punctul A este exterior sferei se consideră cercul mare rezultat prin secționarea acesteia cu un plan care trece prin OA. Tangentele din A la acest cerc vor fi AB și AD, determinînd astfel punctele B și D.

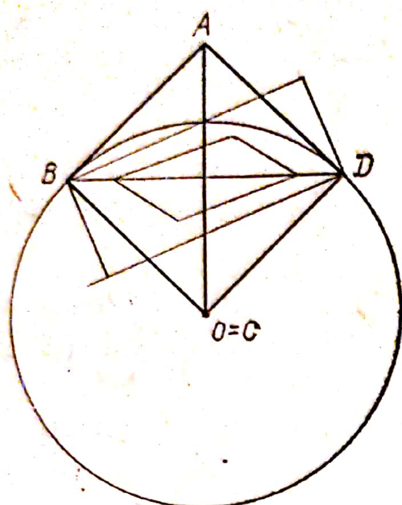


Fig. 94

204. Se verifică ușor că aria S a triunghiului avînd vîrfurile $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$ și $C(c_1, c_2)$ se calculează prin formula

$$2S = \pm[(a_1 - c_1)(b_2 - c_2) - (a_2 - c_2)(b_1 - c_1)]. \tag{1}$$

Coordonatele punctelor P_i vor fi întregi și luate modulo 2. Atunci acestea se reduc la patru tipuri de perechi: (0, 0), (0, 1), (1, 0) și (1, 1). De aceea cel puțin coordonatele a două puncte P_i ($i = 1, 2, \ldots, 5$) coincid (modulo 2). Conform cu formula (1) dublul ariei unui triunghi care are aceste două puncte ca vîrfuri va fi un număr par și S va fi, în consecință, întreg. Este clar însă că printre triunghiurile cu vîrfurile în punctele P_i ($i = 1, 2, \ldots, 5$) există trei cu vîrfurile în cele două puncte date și au aria exprimată deci prin numere întregi.

205. Dacă se dă un cerc de rază r și cu centrul în punctul O, fiecărui punct P diferit de O i se poate pune în corespondență un punct P', situat pe dreapta OP de o aceeași parte cu O ca și P, astfel încît $OP' = \dfrac{r^2}{OP}$. Punctul P' va fi denumit în mod natural punct simetric al punctului P față de cerc. Considerîndu-se o altă pereche de puncte Q și Q', simetrice față de cerc, triunghiurile OPQ și $OP'Q'$ sînt asemenea, deci

$$\frac{OP'}{OQ} = \frac{OQ'}{OP} = \frac{r^2}{OP \cdot OQ},$$

ceea ce arată că

$$P'Q' = PQ\frac{r^2}{OP \cdot OQ}.$$

Se consideră în continuare sfera de rază $\sqrt{AB \cdot AC \cdot AD}$ avînd centrul în punctul A. Fie A', B', C' punctele simetrice ale punctelor A, B, C, față de sfera dată. Folosind formula obținută mai sus, se constată ușor că $C'D' = x$, $B'D' = y$, $B'C' = z$, deci triunghiul $B'C'D'$ este cel căutat.

206. Pe baza identităților $S_n \equiv S_{-n}$ și $S_1 S_n \equiv S_{n+1} + S_{n-1}$ este suficient să se demonstreze că $S_1 = a + a^{-1}$ este număr întreg. Fără a restrînge generalitatea, se poate presupune că $a > 1$ și $k > 1$. Se obțin ușor formulele

$$a^k = \frac{S_k + \sqrt{S_k^2 - 4}}{2}, \quad a^{-k} = \frac{S_k - \sqrt{S_k^2 - 4}}{2},$$

$$a^{k+1} = \frac{S_{k+1} + \sqrt{S_{k+1}^2 - 4}}{2}, \quad a^{-k-1} = \frac{S_{k+1} - \sqrt{S_{k+1}^2 - 4}}{2}.$$

Înlocuind aceste valori în identitățile

$$S_1 = a^{k+1} a^{-k} + a^k a^{-k-1} \text{ și } (a^k)^{k+1} = (a^{k+1})^k,$$

se obține

$$S_1 = \frac{S_k S_{k+1} - \sqrt{(S_k^2 - 4)(S_{k+1}^2 - 4)}}{2} \qquad (1)$$

și

$$\left(\frac{S_k + \sqrt{S_k^2 - 4}}{2}\right)^{k+1} = \left(\frac{S_{k+1} + \sqrt{S_{k+1}^2 - 4}}{2}\right)^k.$$

Desfăcînd parantezele în ultima egalitate, aceasta ia forma

$$r + s \cdot \sqrt{S_k^2 - 4} = u + v\sqrt{S_{k+1}^2 - 4},$$

r, s, u, v fiind numere raționale pozitive. Înseamnă că

$$(s\sqrt{S_2^k - 4} - v\sqrt{S_{k+1}^2 - 4})^2 = (u - r)^2,$$

deci

$$\sqrt{(S_k^2-4)\cdot(S_{k+1}^2-4)}=\frac{R}{sv},$$

R fiind un număr rațional. Se deduce cu ușurință că $\sqrt{(S_k^2-4)(S_{k+1}^2-4)}$ este număr întreg.

Dacă unul din numerele S_k și S_{k+1} este par, numerele S_kS_{k+1} și $(S_k^2-4)(S_{k+1}^2-4)$ sînt ambele pare. Dacă numerele S_k și S_{k+1} sînt ambele impare, numerele S_kS_{k+1} și $(S_k^2-4)(S_{k+1}^2-4)$ sînt ambele impare.

În fiecare caz numărătorul expresiei (1) este întreg și par, deci S_1 este număr întreg.

207. Deoarece $2^{147}-1=8^{49}-1=(8-1)(8^{48}+8^{47}+\ldots+1)$, iar $343=7^3$, este suficient să se demonstreze că $8^{48}+8^{47}+\ldots+1$ se divide prin 49, ceea ce se verifică ușor prin dezvoltarea fiecărui termen de forma 8^m cu ajutorul binomului lui Newton : $8^m=(7+1)^m$.

208. Se notează tg $\alpha=x$, tg $\beta=y$, tg $\gamma=z$. Se verifică ușor că

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma)=\frac{x+y+z-xyz}{1-(xy+xz+yz)}.$$

Numărătorul ultimei fracții este nul, conform enunțului, numitorul este diferit de zero, deoarece în caz contrar numerele x, y, z ar fi soluții ale ecuației

$$\lambda^3-a\lambda^2+\lambda-a=0,$$

ceea ce nu se poate, deoarece $\lambda^3-a\lambda^2+\lambda-a=(\lambda^2+1)(\lambda-a)$. Astfel $\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma)=0$, adică $\alpha+\beta+\gamma=0\ (\mathrm{mod}\ \pi)$, și de asemenea $3(\alpha+\beta+\gamma)=0\ (\mathrm{mod}\ \pi)$. Rezultă

$$\operatorname{tg}(3\alpha+3\beta+3\gamma)=0.$$

Continuarea se face ținînd seama de tangenta unghiului triplu.

209. Un cuvînt care nu cuprinde combinații interzise de litere se va numi admis. Se notează cu a_n numărul cuvintelor admise de lungimea n. Se observă că prin adăugarea la dreapta unui cuvînt admis a oricăreia dintre cele trei litere ale alfabetului se obține sau un cuvînt admis de lungime $n+1$, sau un cuvînt care se termină cu o combinație interzisă. Se obține în acest fel inegalitatea

$$a_{n+1}\geqslant 3a_n-a_{n-1}-a_{n-2}-\ldots-a_2-a_1-1,$$

din care, folosind, de exemplu, inducţia matematică, se poate găsi că

$$a_n > \sum_{k=0}^{n-1} a_k \text{ şi } a_n > 2^n, \text{ dacă } n \geqslant 1.$$

210. Minimul care figurează în enunţ se notează cu μ^2 şi se consideră, fără a restrînge generalitatea, că $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_5$. În acest caz $a_{i+1} - a_i \geqslant \mu > 0$ pentru $i = 1, 2, 3, 4$. În consecinţă

$$(a_j - a_i)^2 \geqslant (i - j)^2 \mu^2.$$

Se observă că $\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant 5} (a_i - a_j)^2 = 5 \sum_{i=1}^{5} a_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{5} a_i\right)^2$, ceea ce implică $\mu^2 \dfrac{5^2(5^2-1)}{12} = \mu^2 \cdot \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant 5} (i-j)^2 \leqslant \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant 5} (a_i - a_j)^2 \leqslant 5$, deci $\mu \leqslant \dfrac{1}{10}$.

Problema poate fi generalizată pentru cazul a n numere.

211. Se observă că punctele $P_1(i, j)$, $P_2(k, m)$, $P_3(k + m - j, m + i - k)$, $P_4(i + m - j, j + i - k)$ sînt vîrfurile unui pătrat inclus în pătratul de vîrfuri $(1, 1)$, $(1, n)$, $(n, 1)$ şi (n, n), dacă i, j, k, m verifică relaţiile din enunţ. Se precizează că unghiul $P_1P_2P_3$ are acelaşi sens ca şi unghiul xOy. Pătratul $P_1P_2P_3P_4$ are vîrfurile situate pe laturile unui pătrat Q, ale cărui vîrfuri au coordonate întregi cuprinse între 1 şi n şi ale cărui laturi sînt paralele cu axele. Există r^2 pătrate Q de latură $n-r$, fiecărui asemenea pătrat Q corespunzîndu-i $4(n-r)$ pătrate $P_1P_2P_3P_4$, deci tot atîtea soluţii ale sistemului din enunţ, dacă $n-r > 0$, şi un singur pătrat $P_1P_2P_3P_4$ degenerat la un punct, dacă $n-r = 0$. Fiindcă $m-r \leqslant n-1$, numărul de soluţii va fi

$$\sum_{r=1}^{n-1} 4r^2(n-r) + n^2.$$

Calculînd această expresie, se obţine $\dfrac{1}{3} n^2(n^2+2)$.

212. Se notează cu $x_1^{(n)}$, $x_2^{(n)}$, $x_3^{(n)}$, $x_4^{(n)}$ unghiurile OA_nB_n, OB_nC_n, OC_nD_n, OD_nA_n respectiv, iar cu $y_1^{(n)}$, $y_2^{(n)}$, $y_3^{(n)}$, $y_4^{(n)}$ unghiurile OA_nD_n, OB_nA_n, OC_nB_n, respectiv OD_nC_n. Considerînd patrulatere inscriptibile, se constată că $x_1^{(n+1)} = x_2^{(n)}$, $x_2^{(n+1)} = x_3^{(n)}$, $x_3^{(n+1)} =$

$= x_4^{(n)}$, $x_4^{(n+1)} = x_1^{(n)}$ iar $y_i^{(n+1)} = y_i^{(n)} (i = 1, 2, 3, 4)$. Deci $x_1^{(n+2)} = x_3^{(n)}$, $x_1^{(n+3)} = x_1^{(n)}$, $x_4^{(n+4)} = x_1^{(n)}$ ş.a.m.d., ceea ce arată că patrulaterele $A_0B_0C_0D_0$ şi $A_4B_4C_4D_4$ se descompun în triunghiuri asemenea şi la fel aşezate, ceea ce trebuia demonstrat.

213. Fiindcă raza cercului nu este mai mică decît 2, există cel puţin patru puncte interioare cercului care aparţin reţelei. Mulţimea punctelor din reţea situate în interiorul cercului formează un poligon, al cărui contur are unghiuri interioare de 90°, 180°, 270° şi eventual chiar 0°, ultimele fiind în mod necesar încadrate de două unghiuri de 270° şi nu de 180°, deci poligonul nu poate avea „ţepi“ care ies în afară mai lungi de 1. Toate laturile conturului au fost unghiuri de 270° şi un de 180°, deci poligonul nu poate avea „ţopi care ies în afară mai lungi de 1. Toate laturile conturului au fost considerate de lungime 1 iar punctul alăturat unei „ţepi“ se consideră de două ori vîrf.

Punctele de frontieră interioare sînt cele de pe contur, în afară de cele în care unghiul este de 270°, deci numărul lor este egal cu perimetrul p al conturului din care se scade numărul q al unghiurilor de 270°. În mod analog se descriu punctele de frontieră exterioare, al căror număr este egal cu perimetrul p' al unui contur care „înfăşoară conturul precedent, minus numărul q' de unghiuri de 90° ale aceluiaşi contur. Se observă că q' este egal cu numărul de unghiuri de 90° din conturul interior, plus de două ori numărul de unghiuri de 0° ale acestuia, deci $q' - q$ este dat de suma diferenţelor dintre 180° şi unghiurile interioare ale poligonului interior, care se ştie că este 360°, împărţită la 90°, adică $q' - q = 4$. Pe de altă parte, la fiecare unghi de 90° al poligonului interior, perimetrul celui exterior „cîştigă“ două unităţi, la fiecare unghi de 270° „pierde 2 unităţi, iar la fiecare unghi de 0° „cîştigă“ 4 unităţi, deci $p' - p = 2(q' - q) = 8$. Diferenţa dîntre numărul de puncte frontieră exterioare şi interioare este deci $p' - q' - - (p - q) = 8 - 4 = 4$.

214. Fie direcţia D din plan. Figura F care se cere este mărginită, deci este conţinută într-o bandă B determinată de două drepte paralele D_1 şi D_2 avînd direcţia D. Întrucît figura F este închisă, dreptele D_1 şi D_2 pot fi astfel alese încît să conţină cel puţin cîte un punct P_1, respectiv P_2 din F. Este necesar ca $P_1P_2 \perp D$, deoarece în caz contrar ambele semicercuri cu extremităţile în punctele P_1, P_2 ar depăşi frontierele lui B. Fie semicercul S cu extremităţile în P_1, P_2, conţinut în F. Dacă punctul Q se află pe S şi este diferit de punctul P_1 şi de punctul P_2, atunci numai unul dintre cele două

semicercuri care îl unesc pe acesta cu P_1 nu iese afară din B şi anume cel situat în interiorul C al cercului determinat de S. Conform ipotezei care se face asupra lui F, acest cerc este inclus în întregime în F. Cînd Q parcurge semicercul S, cu excepţia lui P_1, semicercul care îl uneşte cu P_1 şi este situat în discul mărginit de S umple tot acest interior. Mulţimea F fiind închisă, rezultă că $F \supset C$. Mai mult, $F = C$ (discul închis C) fiind altfel s-ar putea alege o altă direcţie D' găsind în acest mod două puncte P_1' şi P_2' ca mai sus, iar $P_1'P_2' > P_1P_2$. Permutînd direcţiile D, D', se ajunge la contradicţie.

Se verifică imediat că orice disc închis satisface enunţul.

215. Demonstraţia propoziţiei din enunţ se face prin inducţie completă. Pentru $n = 1$ propoziţia este adevărată. Se observă că numai la construirea lui w_{2^n-1} se găseşte $j = n$, deci se înlocuieşte $a_n = 0$ cu $a_n = 1$. În rest algoritmul acţionează în cazul n la fel ca şi în cazul $n - 1$ asupra primelor $n - 1$ cifre (evident, pentru $m > 2^{n-1}$, ca şi cum în locul lui m ar fi $m - 2^{n-1}$ ş.a.m.d.).

216. Se alege f ca produsul tuturor polinoamelor de forma $a_1x_1 + \ldots + a_{n-1}x_{n-1} + x_n$, în care $a_1 = \pm 1, \ldots, a_{n-1} = \pm 1$, cu excepţia lui $x_1 + \ldots + x_n$. Pentru a arăta că produsul dintre f şi $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ conţine numai puteri pare ale variabilelor se arată că el nu se schimbă înlocuind x_i prin $-x_i$. Cînd $i = 1, 2, \ldots$ $\ldots, n - 1$, acesta este evident, iar pentru $i = n$ acesta rezultă schimbînd semnele tuturor factorilor în produsul obţinut, factori care sînt în număr par 2^{n-1} pentru $n > 1$. Dacă $n = 1$ se ia $f(x) = x$. Relaţia din enunţ este în consecinţă satisfăcută pentru orice n.

217. Există 2^n şiruri de forma celor din enunţ. Fie $cB = \{x = cb \mid b \in B\}$. Fie mulţimea $M_c = \{(c, b), b \in cB \cap B\}$. Fiecărui element $b \in B$ îi corespund k perechi din M_c, de aceea M_c are k^2 elemente. Dacă în orice $cB \cap B$ sînt cel puţin m elemente, atunci fiecărui c îi corespund cel puţin m perechi din M_c, deci M_c are cel puţin $m \cdot 2^n$ elemente, adică $m \cdot 2^n \leqslant k^2$ ş.a.m.d.

218. Dacă un plan trece prin trei puncte ale lui E, acesta va mai conţine cel puţin încă un punct din E. Dacă se poate alege acest plan astfel ca să conţină patru puncte din E care să fie vîrfurile unui patrulater convex care nu conţine în interior alte puncte din E, problema se rezolvă luînd un punct din E în afara acestui plan, apoi, dacă există, un punct din E diferit de cele cinci puncte aparţinînd piramidei respective ş.a.m.d., pînă cînd procedeul se opreşte datorită finititudinii lui E.

Alegerea planului se face în modul următor. Se consideră toate perechile (A, P), A fiind un punct al mulţimii E şi P un plan care conţine cel puţin trei puncte din E dar nu conţine punctul A. Se alege o astfel de pereche (A, P) încît distanţa de la A la P să fie minimă. Fie punctele A_1, A_2, A_3, A_4 situate în $P \cap E$. Se presupune că unul din acestea, fie A_1, este situat în interiorul triunghiului care are ca vîrfuri pe celelalte trei, iar în acel triunghi nu mai există puncte din E. Dacă se obţine o contradicţie, pe baza primului alineat problema este rezolvată.

Fie B proiecţia punctului A pe planul P. Distanţele de la B la planele AA_2A_3, AA_3A_4, AA_4A_2 vor fi cel mult egale cu distanţa de la A la planul P şi cel puţin una dintre acestea este mai mică decît această ultimă distanţă, deoarece în caz contrar BA ar fi perpendiculară pe toate cele trei plane. Din modul de alegere al lui (A, P) rezultă că distanţele de la A_1 la cele trei plane trebuie să fie mai mari sau egale cu distanţa de la A la P. Se observă că distanţele de la diferitele puncte dintr-un plan la alt plan sînt de acelaşi ordin de mărime ca şi distanţele acelor puncte la dreapta de intersecţie a celor două plane. Se deduce astfel că distanţele de la A_1 la A_2A_3, A_3A_4, A_4A_2 sînt respectiv mai mari sau egale cu distanţele corespunzătoare de la B, inegalitatea fiind strictă cel puţin în unul din cazuri. O asemenea situaţie este însă compatibilă cu faptul că A_1 este situat în interiorul triunghiului $A_2A_3A_4$.

219. Deoarece x_i este număr întreg, rezultă că $x_{i+1} = \left[\frac{1}{2}\left(x_i + \frac{n}{x_i}\right)\right]$. Din relaţiile $\frac{1}{2}\left(x + \frac{n}{x}\right) - \sqrt{n} = \frac{1}{2}\,\frac{(x - \sqrt{n})^2}{2}$ şi $x_1 > \sqrt{n}$ se deduce că $\min(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geqslant [\sqrt{n}]$.

Se presupune, contrar ipotezei, că $x_i \geqslant [\sqrt{n}] + 1$, pentru $i = 1, 2, \ldots, n$. Se defineşte $x_1' = x_1$, $x_{i+1}' = \frac{1}{2}\left(x_i' + \frac{n}{x_i'}\right)$. Deoarece funcţia $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{n}{x}\right)$ este crescătoare dacă $x \geqslant \sqrt{n}$ (fapt care se verifică pornind direct de la definiţie), rezultă că $x_i \leqslant x_i'$ drept consecinţă a relaţiei $x_i > \sqrt{n}$. Folosind de mai multe ori una din relaţiile de mai sus, se găseşte că $x_{n-1}' - \sqrt{n} \leqslant \frac{1}{2^{n-2}}(n - \sqrt{n}) < \frac{n-1}{2^{n-2}} \leqslant 1$, deci $x_{n-1} - [\sqrt{n}] \leqslant 1$. Rămîne de arătat că dacă se

notează $a = [\sqrt{n}]$, este adevărată inegalitatea $\frac{1}{2}\left(a + 1 + \frac{n}{a+1}\right) <$ $< a + 1$, ceea ce înseamnă că $n < (a + 1)^2$, adică $\sqrt{n} < [\sqrt{n}] + 1$, deci $x_n = [\sqrt{n}]$ etc.

220. Pentru ca media aritmetică a trei numere întregi să fie un număr întreg este necesar şi suficient ca acestea să fie în unul din următoarele cazuri:

1) Restul obţinut prin împărţirea fiecărui dintre aceste numere la 3 este acelaşi.

2) Prin împărţirea fiecăruia dintre aceste numere la 3 se găsesc resturile 0, 1, 2.

Un punct din plan care are ambele coordonate exprimate prin numere întregi aparţine la una din cele nouă clase determinate de resturile împărţirii coordonatelor sale prin 3. Dacă o mulţime E are proprietăţile din enunţ, nu poate avea mai mult de două puncte în aceeaşi clasă (ambele coordonate se află în primul caz de mai sus).

Fie F mulţimea claselor în care există puncte din E. Dacă E are mai mult de şase elemente, atunci în F vor exista două clase (a, b), (a, b_1) cu $b \neq b_1$ şi două clase (a_1, b_2), (a_2, b_2) cu $a_1 \neq a_2$.

a) Dacă $a \neq a_1$, $a \neq a_2$, $b \neq b_2$, $b_1 \neq b_2$, atunci $(a, b_2) \notin F$ (cazul 1 pentru abscise şi cazul 2 pentru ordonate) şi $(a_1, b_1) \notin F$ (cazul 2 la ambele coordonate, cu (a, b), (a_2, b_2)). Deoarece a_1 şi a_2 au roluri simetrice ca şi b cu b_1, rezultă că $F = \{(a, b), (a, b_1), (a_1, b_2), (a_2, b_2)\}$.

b) Dacă, de exemplu, $a = a_2$ (dacă nu are loc situaţia a), se poate presupune egalitatea adevărată făcînd eventual o schimbare de axe sau de notaţii), atunci $b_2 \neq b$, $b_2 \neq b_1$ conduce la contradicţie (cazul 1 pentru abscise, cazul 2 pentru ordonate). Se presupune, eventual schimbînd notaţiile, că $b = b_2$, deci $(a, b) \in F$, $(a, b_1) \in F$ şi $(a_1, b) \in F$. Fie $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ clasele care nu au intervenit. F nu va putea conţine $(a, \bar{b})$, $(\bar{a}, b)$ (cazul 1 pentru una din coordonate, 2 pentru cealaltă) şi nici $(\bar{a}, \bar{b})$ (cazul 2 pentru ambele coordonate, cu (a, b_1), (a_1, b)). Este posibil ca $(a_1, b_1) \in F$, însă atunci $(\bar{a}, b_1) \notin F$, $(a_1, b) \notin F$ (cazul 1 pentru o coordonată, cazul 2 pentru cealaltă) şi deci $F = \{(a, b), (a, b_1), (a_1, b)\ (a_1, b_1)\}$. Este posibil şi $(a_1, \bar{b}) \in F$, însă atunci $(a_1, b_1) \notin F$ (cazul 1 pentru abscise, cazul 2 pentru ordonate), şi $(a_1, b_1) \notin F$ (cazul 2 pentru ambele coordonate, cu (a, b), $(a_1, \bar{b})$) şi deci $F = \{(a, b), (a, b_1), (a_1, b)\ (a_1, b)\}$. Rezultă că E nu poate conţine mai mult de opt elemente. Această situaţie se poate realiza considerînd, în oricare dintre cele trei situaţii posibile pentru F, cîte două puncte în fiecare clasă din F.

REZOLVĂRILE PROBLEMELOR DATE LA OLIMPIADE NAŢIONALE

221. Fie (a_i, b_i) dimensiunile celui de-al i-lea dreptunghi. În acest caz

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4 = n^2 - 1, \tag{1}$$

a_i şi b_i fiind numere pozitive diferite între ele, mai mari decît 1.

Se va găsi cea mai mică valoare a lui n. Se iau cele mai mici numere care satisfac condiţiile problemei şi anume: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Dintre toate sumele de forma (1) suma

$$2 \cdot 9 + 3 \cdot 8 + 4 \cdot 7 + 5 \cdot 6 = 100 \tag{2}$$

va fi cea mai mică. Orice schimbare a factorilor care intervin sau mărire a acestora duce la mărirea sumei. Din această cauză cea mai mică dintre valorile posibile pentru n va fi $n = 11$. Se arată, în continuare, că există astfel de (a_i, b_i) încît $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4 = 120$. Primul termen din suma (2) se înlocuieşte cu $2 \cdot 19$, iar ceilalţi termeni nu suferă nici o modificare. Dreptunghiurile avînd laturile (2, 19), (3, 8), (4, 7), (5, 6) satisfac condiţiile problemei.

Se arată, mai departe, că pentru orice $n > 11$ se poate indica o descompunere de forma (1).

$n^2 - 1$ diferă de 100 fie cu un număr par de forma $2l$, fie cu un număr impar de forma $2l + 1$. În primul caz, înlocuind dreptunghiul de dimensiuni (2, 9) cu dreptunghiul de dimensiuni $(2, 9 + l)$, iar celelalte lăsîndu-le neschimbate, se obţine descompunerea cerută. În al doilea caz se înlocuieşte dreptunghiul de dimensiuni (2, 9) cu cel de dimensiuni $(2, 9 + (l - 1))$ şi dreptunghiul de dimensiuni (3, 8) cu cel de dimensiuni (3, 9), celelalte dreptunghiuri nefiind supuse nici unei schimbări. Se obţine astfel descompunerea cerută.

222. Fie

$$f(x) \cdot f(y) = f(x - y), \tag{1}$$

pentru orice valori reale x, y.

a) Se face în (1) înlocuirea $x = x_0$, astfel ca $f(x_0) \neq 0$. Un astfel de x_0 se găseşte întotdeauna deoarece conform enunţului

$f(x) \not\equiv 0$. Pentru $x = x_0$ şi $y = 0$ se obţine $f(x_0)f(0) = f(x_0)$, rezultînd deci $f(0) = 1$.

b) Se înlocuieşte în (1) $y = x$ şi se obţine $[f(x)]^2 = f(0)$.

c) Se înlocuieşte în (1) $y = \frac{x}{2}$ şi se obţine $f(x) \cdot f\left(\frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right)$. Deoarece $f\left(\frac{x}{2}\right) \not\equiv 0$ (conform punctului b), se deduce că $f(x) = 1$.

223. Propoziţia din enunţ este evidentă pentru $n = 1$. Se realizează pasul inductiv de la n la $n + 1$. Fie o mulţime formată din $n + 2$ numere pozitive care nu depăşesc numărul $2n + 2$. Dacă numărul $2n + 2$ nu aparţine mulţimii, submulţimea formată din numerele care nu depăşesc pe $2n$ conţine cel puţin $n + 1$ elemente şi, conform ipotezei de la inducţie, se găseşte un element al său care se devide la altul, element care aparţine şi la mulţimea iniţială. În cazul cînd numărul $2n + 2$ este element al acestei mulţimi, atunci fie numărul $n + 1$ aparţine mulţimii şi demonstraţia se încheie, fie nu aparţine. În acest din urmă caz, considerînd din nou submulţimea formată din numerele care nu depăşesc $2n$ şi adăugîndu-i acesteia numărul $n + 1$, se obţine o nouă mulţime, formată cel puţin din $n + 1$ elemente în care se găseşte conform ipotezei de la inducţie un element care se divide cu un altul al aceleiaşi mulţimi. Dacă acest element nu este $n + 1$, înseamnă că aparţine mulţimii iniţiale şi este deci cel căutat. Dacă acesta este $n + 1$, numărul $2n + 2$ care aparţine mulţimii are proprietatea cerută.

În acest fel, elementul cerut poate fi totdeauna găsit.

224. Fie n numărul feţelor unui astfel de poliedru. Suma unghiurilor fiecărei feţe este egală cu 4π, iar suma tuturor acestor unghiuri este $4\pi n$. Pe de altă parte, numărul vîrfurilor poliedrului nu depăşeşte $\frac{6n}{3} = 2n$, iar suma unghiurilor plane în unul din vîrfuri este strict mai mică decît 2π. De aceea suma tuturor unghiurilor plane ale poliedrului trebuie să fie strict mai mică decît $4\pi n$, ceea ce constituie o contradicţie.

225. Se verifică uşor că trei „duble" (perechi de numere identice) nu pot aparţine aceleiaşi submulţimi. Rezultă că o submulţime trebuie să conţină exact o „dublă". O dublă se poate alege în cinci moduri, putîndu-i-se adăuga în lanţ la ambele capete $\frac{4 \cdot 3}{2}$

perechi diferite. În lanţ se poate deci construi cu o dublă $5 \cdot 6$ triplete diferite de forma (b, a) (a, a) (a, c), unde a, b, c sînt numere diferite de la 1 la 5. Se observă cu uşurinţă că fiecare astfel de triplet poate fi completat formînd un lanţ închis numai în două moduri.

Astfel, o submulţime conţinînd o singură dublă se poate forma în $5 \cdot 5 \cdot 2 = 60$ moduri. Se poate demonstra în continuare că formînd astfel submulţimea, celelalte două submulţimi ale descompunerii se determină unic. De aceea există 60 de asemenea descompuneri.

226. Latura pătratului înscris în cerc este $x' = \sqrt{2}r$.

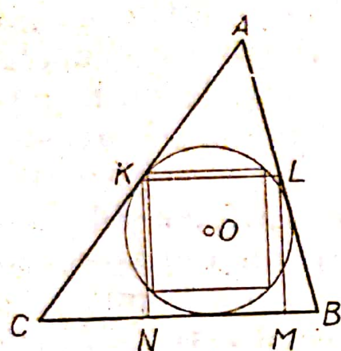


Fig. 95

Fie pătratul înscris în cerc (fig. 95) şi avînd una din laturi paralelă cu BC. Pătratul înscris în triunghi are aria maximă dintre toate pătratele cuprinse în triunghi. Prin urmare, latura sa x este mai mare decît latura x', adică $x > x' = \sqrt{2}r$.

Se înscrie în triunghiul dat un pătrat, iar în pătrat se înscrie un cerc. Acest cerc este situat în triunghi. De aceea raza sa $\frac{x}{2} < r$, (r fiind raza cercului înscris în triunghi) deoarece cercul înscris în triunghi este cel mai mare dintre toate cercurile situate în întregime în interiorul triunghiului.

S-a arătat astfel că $r\sqrt{2} < x < 2r$.

227. Se construieşte cercul (fig. 96) de rază maximă, care trece prin punctul A' şi este tangent la laturile unghiului dat. Se notează prin B şi C punctele de tangenţă ale cercului cu laturile unghiului. Distanţa dintre extremităţile B şi C este $2\sqrt{2} + 2$. Se va arăta că arcul $BA'C$ al cercului poate fi tras pe coridor. Se roteşte cercul cu 45° în jurul centrului O. Punctul B este suprapus astfel peste punctul A', punctul A' peste punctul C şi punctul C peste punctul C', adică arcul de cerc $BA'C$ se va suprapune peste arcul $A'CC'$. În continuare ţeava va fi deplasată de-a lungul lui $A'C'$. Analog, rotind arcul $BA'C$ cu un unghi de 45° în sens opus, se obţine arcul $B'BA'$, deci arcul $BA'C$ poate fi tras pe ambele părţi ale coridorului trecînd prin colţul respectiv.

Se arată că nu poate fi trasă în aceste condiţii o ţeavă avînd distanţa mai mare între extremităţi. Lăţimea minimă a unei benzi prin care poate fi tras o curbă se va numi lăţimea curbei. Se presupune că se poate trage pe coridor o ţeavă avînd distanţa

între extremităţi $FE > 2 + 2\sqrt{2} > \sqrt{2}$ (fig. 97). De aceea unghiul format de direcţiile segmentelor EF şi $A'A$ este obtuz. În cealaltă porţiune de coridor unghiul analog va fi ascuţit. Rezultă că la traversarea colţului se găseşte o poziţie a ţevii în care dreapta EF este perpendiculară pe AO (v. fig. 96). Fie punctul D' în care

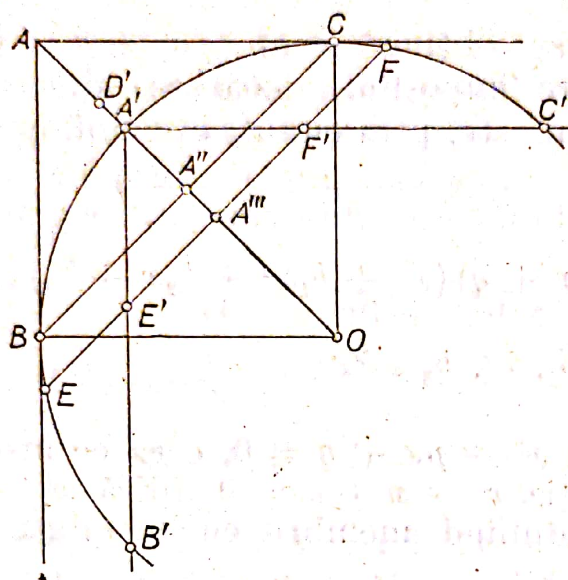


Fig. 96

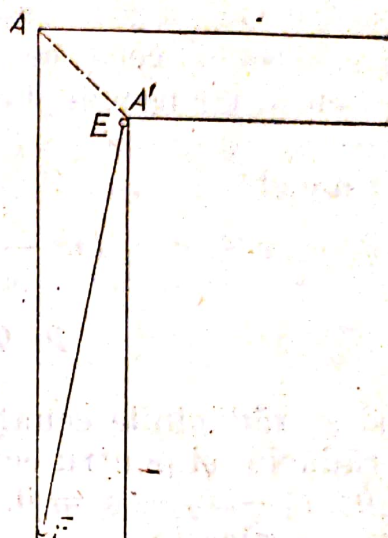


Fig. 97

ţeava intersectează pe AO în această poziţie. Se notează cu F' şi E' punctele de intersecţie ale lui FE cu unghiul interior. În acest caz $FF' \leqslant \sqrt{2}$ şi $EE' \leqslant \sqrt{2}$ iar

$$F'E' = FE - FF' - E'F > 2 + 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 2.$$

Pe baza convexităţii benzii, dacă toată figura este trasă în această bandă, este tras de asemenea orice triunghi avînd vîrfurile în puncte ale figurii. Se consideră în locul triunghiului $FD'E$ triunghiul $F'A'E$ situat în interiorul lui $FD'E$. Triunghiul $F'A'E'$ este dreptunghic isoscel. Lăţimea sa minimă este cea mai mică înălţime $A'A'' = \frac{E'F'}{2}$, adică depăşeşte unitatea. Din această cauză triunghiul $F'A'E'$ nu poate fi tras în această bandă şi deci nu poate fi trasă nici întreaga ţeavă.

Cea mai mare distanţă între capetele ţevii va fi deci $2 + 2\sqrt{2}$.

228. Se observă că $n^5 - n$ se devide la 5 pentru orice număr întreg n. Se presupune că $f(x)$ este produs a două polinoame cu coeficienţi întregi. Se vor examina două cazuri:

C a z u l a).

$$x^5 - x + a = (a_0 x + a_1)(b_0 x^4 + b_1 x^3 + b_2 x^2 + b_3 x + b_4). \quad (1)$$

Identificînd coeficienţii lui x^5, se găseşte $a_0 b_0 = 1$, deducînd astfel că numerele întregi a_0 şi b_0 sînt ± 1. Se poate considera că $a_0 = b_0 = 1$.

Dacă se ia $x = -a_1$, se obţine $-a_1^5 + a_1 + a = 0$ sau $a_1^5 - a_1 - a = 0$, ceea ce este imposibil, deoarece $a_1^5 - a_1$ este divizibil cu 5, iar numărul a nu este, prin enunţ, divizibil cu 5.

C a z u l b).

$$x^5 - x + a = (x^2 - px + q)(x^3 + b_1 x^2 + b_2 x + b_3);$$

$$p, q, b_1, b_2, b_3 \in Z. \quad (2)$$

Fie x_1 şi x_2 rădăcinile ecuaţiei $x^2 - px + q = 0$, ceea ce înseamnă că sînt rădăcini şi pentru ecuaţia $x^5 - x + a = 0$, adică $x_1^5 - x_1 + a = 0$, $x_2^5 - x_2 + a = 0$. Adunînd membru cu membru aceste egalităţi, se găseşte

$$x_1^5 + x_2^5 - (x_1 + x_2) + 2a = 0. \quad (3)$$

Fiindcă $x_1 + x_2 = p$, se obţine

$$p^5 = (x_1 + x_2)^5 = x_1^5 + x_2^5 + 5x_1 x_2(x_1^3 + x_2^3) + 10x_1^2 x_2^2(x_1 + x_2). \quad (4)$$

Din (4) se obţine că $p^5 - (x_1^5 + x_2^5)$ este număr întreg divizibil cu 5. Fie membrul întîi al egalităţii (3)

$$x_1^5 + x_2^5 - (x_1 + x_2) + 2a = x_1^5 + x_2^5 - p^5 + p^5 - p + 2a.$$

S-a arătat că $x_1^5 + x_2^5 - p^5$ şi $p^5 - p$ se divid cu 5. În consecinţă $2a$ trebuie să fie divizibil cu 5, ceea ce contrazice enunţul. Deci $f(x) = x^5 - x + a$ nu poate fi descompus în factori cu coeficienţi întregi.

229. a) Fie toate cifrele nenule. Se obţine ecuaţia

$$\overline{xyz} + \overline{xzy} + \overline{zxy} + \overline{zyx} + \overline{yxz} + \overline{yzx} = 3\overline{xxx}$$

sau, altfel scris,

$$222x + 222y + 222z = 333y, \ 222y + 222z = 111x, \ 2(y + z) = z.$$

Rezultă astfel că x este număr par şi, deoarece y şi z sînt nenule şi nu pot fi simultan egale cu 1, $y + z > 2$. Se obţine $x > 4$, deci x poate fi 6 sau 8 :

$$x = 6,\ y + z = 3,\ y = 2,\ z = 1.$$

$$x = 8,\ y + z = 4,\ y = 3,\ z = 1.$$

Datorită simetriei condiţiilor faţă de y şi z, este indiferent care cifră se notează cu y şi care se notează cu z.

b) x nu poate fi nul, nici y şi z nu se pot anula simultan. Fie unul din acestea două nul, de exemplu y. Ecuaţia ia forma

$$\overline{x0z} + \overline{xz0} + \overline{zx0} + \overline{z0x} = 3\,\overline{xxx}$$

sau, altfel scris,

$$211x + 211z = 333x, \quad 211z = 122x.$$

Numerele 211 şi 122 sînt relativ prime. De aceea nu există valori z şi x care să satisfacă ecuaţia şi să fie cuprinse între 0 şi 9 inclusiv. Cazul este imposibil.

Răspuns: 1) $x = 6,\ y = 2,\ z = 1.$

2) $x = 6,\ y = 1,\ z = 2.$

3) $x = 8,\ y = 3,\ z = 1.$

4) $x = 8,\ y = 1,\ z = 3.$

230. Se trece 1 în partea stîngă a inegalităţii şi se aduce la acelaşi numitor :

$$\frac{x(x+1) - 8(x^2-1) + 15(x-1) - 2x(x^2-1)}{2x(x-1)(x+1)} \geqslant 0,$$

$$\frac{x^2 + x - 8x^2 + 8 + 15x^2 - 15x - 2x^3 + 2x}{2x(x-1)(x+1)} \geqslant 0,$$

$$\frac{-2x^3 + 8x^2 - 12x + 8}{2x(x-1)(x+1)} \geqslant 0,$$

sau, altfel scris,

$$\frac{x^3 - 4x^2 + 6x - 4}{x(x-1)(x+1)} \leqslant 0.$$

Numărătorul se descompune în factori

$$x^3 - 4x^2 + 6x - 4 = (x-2)(x^2 - 2x + 2).$$

Inegalitatea ia forma

$$\frac{(x-2)(x^2-2x+2)}{x(x-1)(x+1)} \leqslant 0. \qquad (1)$$

Discriminantul trimoniului $x^2 - 2x + 2$ este mai mic decît zero şi în consecinţă, oricare ar fi valorile lui x, trinomul va fi pozitiv. De aceea inegalitatea (1) este echivalentă cu

$$\frac{x-2}{x(x-1)(x+1)} \leqslant 0, \quad x \neq 0,\ x \neq \pm 1. \qquad (2)$$

Ambii membri ai inegalităţii (2) se înmulţesc cu numărul pozitiv $x^2(x-1)^2(x+1)^2$. Se obţine

$$(x-2)\,x(x-1)(x+1) \leqslant 0. \qquad (3)$$

Rădăcinile expresiei din membrul întîi al inegalităţii (3) sînt -1, 0, 1, 2, semnul acesteia fiind dat de următorul tabel:

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
E	$+$		0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Inegalitatea este astfel satisfăcută de $x \in (1, 2] \cup (-1, 0)$.

231. Expresia din partea stîngă a egalităţii se transcrie, avînd în vedere că $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, şi aplicînd formulele

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}, \quad \cos x = -\cos(\pi - x),$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}.$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2(\alpha+\beta) - 2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta) = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos(\alpha+\beta)[\cos(\alpha+\beta) - 2\cos\alpha\cos\beta] = \cos^2\alpha + \cos^2\beta - \cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) =$$

$$= \cos^2\alpha + \cos^2\beta - \frac{1}{2}(\cos 2\alpha + \cos 2\beta) =$$

$$= \cos^2\alpha + \cos^2\beta - \frac{1}{2}(2\cos^2\alpha - 1 + 2\cos^2\beta - 1) = 1.$$

Identitatea este astfel demonstrată.

232. Analiza construcţiei. Se vor construi toate triunghiurile ABC asemenea cu cel dat şi care au un vîrf în punctul dat A iar celălalt vîrf B este situat pe o dreaptă dată (fig. 98). Se pune problema găsirii punctelor C. $\sphericalangle CAB = \alpha$ este constant şi raportul $\frac{CA}{BA} = \frac{b}{c}$ este constant. De aceea mulţimea acestor vîrfuri se obţine prin rotirea dreptei date cu unghiul α şi apoi îndepărtînd-o de A de $\frac{b}{c}$ ori. Dreapta a se transformă astfel în în dreapta a'.

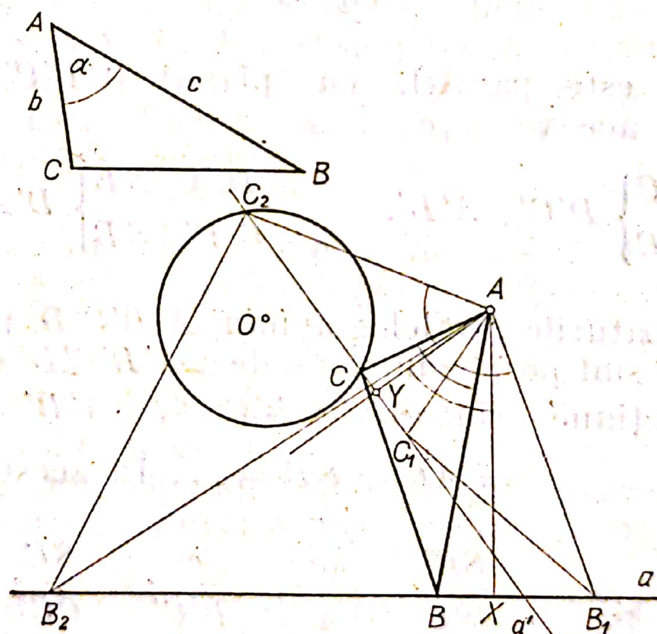


Fig. 98

Se vor găsi două rezolvări, una sau nici una, după cum numărul de puncte comune ale dreptei a' cu cercul dat va fi două, unul sau nici unul. Rezultă astfel următoarea

Construcţie. Prin punctul A se duce perpendiculara AX pe dreapta a (fig. 99). Se construieşte $\sphericalangle XAY$ ($\sphericalangle XAY = \alpha$).

Pe dreapta AY se poartă segmentul AY $\left(AY = \frac{b}{c} AX\right)$. Prin punctul Y se duce dreapta a' perpendiculară pe AY. Intersecţia dreptei a' cu cercul dat va constitui punctul (sau punctele) C.

Fig. 99

233. a) AC este paralelă cu planul $A'B'C'D'$ şi $AC \parallel SB$ (fig. 100). De aceea

$$\left.\begin{array}{l} D'C' \parallel AC \\ A'B' \parallel AC \end{array}\right\} D'C' \parallel A'B', \qquad \left.\begin{array}{l} D'A \parallel SB \\ C'B' \parallel SB \end{array}\right\} D'A' \parallel C'B',$$

iar $SB \perp AC$. Laturile paralelogramului $A'B'C'D'$ paralele cu SB şi respectiv cu AC sînt perpendiculare, deci $A'B'C'D'$ este dreptunghi.

b) Fie o secţiune arbitrară $A'B'C'D'$, $A'B' = a' = ka$, $a = AC = SB = \ldots$ În acest caz

$$\frac{SC'}{SC} = \frac{ka}{a}, \quad \frac{a}{B'C'} = \frac{SC}{CC'} = \frac{SC}{SC - SC'},$$

$$B'C' = b' = (1 - k)a,$$

$$P' = 2ka + 2(1 - k)\ a = 2a,$$

ceea ce arată că perimetrul secţiunii depinde numai de a.

Fig. 100

234. Se notează prin K cercul de centru M și rază MA, circumscris triunghiului PAQ. Este evident că punctul B se află pe acest cerc. Se vor deosebi două cazuri: (1) punctul B se găsește pe arcul de cerc AQP, (2) punctul B se află în afara acestui arc.

C a z u l (1). Examinînd figura 101, se constată că $\sphericalangle ABC = 90°$ și că punctul B se află pe arcul AQ care constituie un sfert de cerc (în caz contrar dreapta CD nu ar trece prin punctul Q). Punctul C, evident, este situat în interiorul segmentului BP. Se notează cu S punctul de intersecție al segmentelor AQ și PB. Punctul C este picior al înălțimii QC în triunghiul dreptunghic PSQ, deci $\sphericalangle SQC = \sphericalangle SPQ$ și $\triangle AQD \sim \triangle QPC$. Mai mult, $\triangle AQD = \triangle QPC$, deoarece $AQ = QP = a$ și, prin urmare, $AD = QC = b$. Deoarece $ABCD$ este pătrat, se găsește că $b = DC = AD$. Trebuie deci ca $QC = DC$ și punctul C este, prin urmare, mijloc al segmentului QD iar S mijloc al segmentului AQ ($CS \parallel AD$, CS fiind linile mijlocie în $\triangle AQD$).

C o n s t r u c ț i e (v. fig. 101). Se construiește mijlocul S al segmentului AQ și se notează B punctul de intersecție al dreptei PS cu cercul K, diferit de P. Prin C se notează simetricul punctului B față de S. Triunghiul ABC ($\sphericalangle ABC = 90°$) va forma împreună cu punctul D un paralelogram care, după cum se va demonstra, satisface condițiile din enunț.

D e m o n s t r a ț i e . Fiind simetrice față de punctul S, $\triangle SQC = \triangle SAB$ și în consecință, $\sphericalangle SCQ = 90°$. De aceea, latura CD a paralelogramului $ABCD$ trece prin punctul Q, toate unghiurile acestui paralelogram fiind deci drepte.

Se găsește, în continuare, că $SA = SQ$, deci și $CD = CQ$. Deoarece $\Delta AQD = \Delta QPC$, înseamnă că $CQ = DA$. Se deduce astfel $CD = DA$ și din paralelogramul $ABCD$ toate laturile și toate unghiurile sînt egale între ele, deci acesta este un pătrat.

D i s c u ț i e. Punctul S se poate construi totdeauna, de aceea există un pătrat, cu vîrful B în interiorul arcului APQ.

Din ΔQSC, în care $\sphericalangle QCS = 90°$, $SC = \frac{1}{2}b$, $QC = AB = b$, rezultă, aplicînd teorema lui Pitagora, că $QS^2 = SC^2 + QC^2$ sau $\frac{a^2}{4} = \frac{5}{4}b^2$, deci $b = \frac{a}{\sqrt{5}}$.

C a z u l (2) (fig. 102). Fie punctul B aflat pe arcul complementar arcului AQP. În acest caz $\sphericalangle ABP = 90°$. Întrucît AC' este diagonală, iar pe dreapta $C'Q$ se află o latură a pătratului, punctul C'

Fig. 101

Fig. 102

aparține locului geometric al punctelor din care segmentul AQ se vede sub un unghi de 45°. În acest caz acest loc geometric este arcul cel mai lung de cerc avînd extremitățile în punctele A, Q. Punctul $C \not\equiv B'$ se află pe PB' și pe cercul K, de aceea este necesar ca $C' \equiv P$ și deci $D' \equiv Q$. Construcția este evidentă (v. fig. 102) dată de pătratul $A'B'C'D'$. Latura pătratului va avea, de această dată, lungimea $AB' = a$.

235. În condițiile problemei trebuie găsite numerele naturale $a, n, m > 1$, astfel ca să fie îndeplinită relația

$$2^n - 1 = a^m. \qquad (1)$$

C a z u l (1). Fie $a = 1$. Relația (1) ia forma $2^n = 2$ pentru orice număr natural m. Rezultă că este necesar ca $n = 1$. Într-adevăr, condiția este îndeplinită cînd $a = n = 1$, $m > 1$.

C a z u l (2). Fie $a > 1$. Se deosebesc două situații:

a) $n = 1$. Relația (1) ia forma $1 = a^m$ și nu poate fi îndeplinită, deoarece pentru orice numere naturale $m \geqslant 1$, $a > 1$, totdeauna $a^m > 1$. În consecință această situație se exclude.

b) Fie $n > 1$. Numărul $2^n > 2$ este par, iar numărul $2^n - 1$ impar. Din relația (1) rezultă însă că numărul a trebuie să fie impar (în

caz contrar numărul a^m nu ar fi impar). Se studiază atunci două posibilități:

(α) Fie $m > 1$ număr natural par. Se ia $a = 2k + 1$, $m = 2p$, k și p fiind numere naturale. După înlocuirea în (1) se găsește

$$2^n - 1 = [(2k + 1)^2]^p \quad \text{sau} \quad 2^n - 1 = [4(k^2 + k) + 1]^p. \tag{2}$$

În partea dreaptă se obține după ridicarea la putere un număr de forma $4Q + 1$, $Q \neq 0$ fiind un număr natural. Relația (1) se poate aduce astfel la forma

$$2^n = 4Q + 2. \tag{3}$$

Deoarece $n > 1$, numărul 2^n este multiplu de 4, în timp ce membrul al doilea al relației (3) nu este multiplu de 4. S-a ajuns în acest mod la o contradicție.

(β) Numărul m este impar. Relația (1) se poate scrie sub forma $2^n = a^m + 1$ $(m \geqslant 2)$. Se aplică la membrul al doilea al lui (3) formula $x^b + y^b = (x + y) \cdot p$ $(p = x^{b-1} - x^{b-2}y + \ldots - xy^{b-2} + y^{b-1})$, care este aplicabilă pentru toate numerele naturale impare $b \geqslant 3$, numărul termenilor polinomului p fiind b. Relația (1) ia atunci forma

$$2^n = (a + 1) \cdot A, \; A = a^{m-1} - a^{m-2} + \ldots - a + 1, \tag{4}$$

A fiind deci o sumă de un număr impar m de termeni impari și deci număr impar. Pentru numerele naturale $2 \leqslant k \leqslant m - 1$ se găsește $Z_k = a^k - a^{k-1} = a^{k-1}(a - 1) > 0$. Deoarece numărul A este sumă dintre cel puțin un număr Z_k și numărul 1, înseamnă că $A > 1$ și deci $A \geqslant 2$. Membrul întîi al relației (4) nu se divide însă la numărul impar $A \geqslant 3$, și s-a ajuns astfel din nou la o contradicție.

C o n c l u z i e. Singurul număr natural n care satisface condițiile problemei este numărul $n = 1$; în acest caz $2^n - 1 = 1$.

236. Pentru rezolvarea acestei probleme se aplică următoarele teoreme cunoscute:

T e o r e m a *U*. Fie dat $\sphericalangle CAB$. Se notează prin X orice punct din interiorul acestui unghi, iar x_1, x_2 sînt distanțele de la acesta la dreptele AC, AB. Atunci mulțimea tuturor punctelor X care satisfac condiția $x_1 \geqslant x_2$ este formată din punctele situate în interiorul sau pe laturile unghiului BAK, semidreapta AK fiind bisectoarea unghiului dat BAC.

T e o r e m a V. Fie segmentul AB avînd mediatoarea O_3. Mulţimea tuturor punctelor X din plan, care satisfac relaţia $XA \geqslant XB$ (considerînd şi distanţele nule), este semiplanul O_3B*.

T e o r e m a W. Dacă se dă unghiul BCM, iar semidreapta CK se află în interiorul acestuia, CK intersectează segmentul BM în interior (fig. 103).

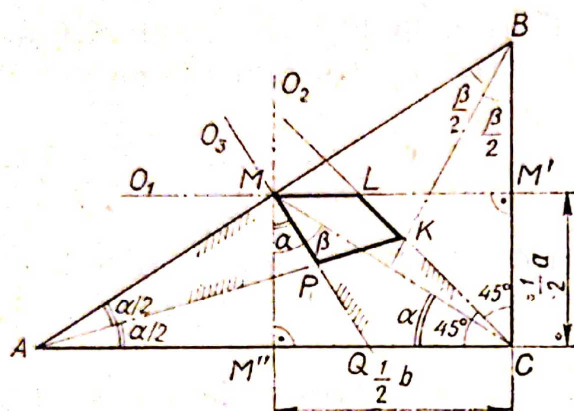


Fig. 103

Rezolvarea problemei se va realiza în două etape. În prima etapă va fi examinată mulţimea tuturor punctelor X ale triunghiului ABC care satisfac condiţia $XA \geqslant XB \geqslant XC$, iar în cea de-a doua etapă se va rezolva efectiv problema.

I. Se notează prin d_1, d_2, d_3 mediatoarele laturilor a, b, c ale triunghiului ABC, prin M', M'' şi M mijloacele acestor laturi, iar prin AK, BK, CK bisectoarele unghiurilor sale, K fiind centrul cercului înscris în triunghiul ABC (situat în interiorul acestuia). Conform enunţului

$$a < b, \tag{1}$$

şi deci unghiurile ascuţite α, β ale triunghiului ABC satisfac inegalităţile

$$0 < \alpha < 45° < \beta < 90°. \tag{2}$$

Din teorema V rezultă că orice punct X al triunghiului ABC, care satisface condiţia $XA > XB$, este situat în semiplanul O_3B; orice punct X al triunghiului ABC, care satisface condiţia $XB > XC$, este situat în semiplanul O_1C. Punctul X care satisface condiţiile

$$XA \geqslant XB \geqslant XC \tag{3}$$

este situat simultan în interiorul unghiului drept BCA şi în interiorul unghiului ascuţit QMM', unde Q este punctul de intersecţie al dreptelor AB şi O_3. Intersecţia semiplanelor O_1C şi O_3B este măr-

* Semiplanul determinat de dreapta O_i şi conţinînd punctul Y se notează O_iY.

ginită de unghiul QMM'. Înainte de a stabili ce figură descriu punctele X se fac următoarele constatări:

(1) $O_1 \parallel AC$, deoarece $AC \perp CB$, $O_1 \perp CB$;

(2) $MA = MB = MC$, deoarece M este centrul cercului circumscris triunghiului ABC. Triunghiul MAC va fi, în consecință, isoscel iar O_2 va fi axa sa de simetrie, ceea ce atrage după sine că

$$\sphericalangle CMM'' = \sphericalangle AMM'' = \beta \tag{4}$$

(deoarece în triunghiul AMM'', $\hat{A} = \alpha$, $\hat{M}'' = 90°$, $\hat{M} = \beta$). $\sphericalangle QMM'' = \alpha$, deci $\sphericalangle XMM'' > \sphericalangle QMM''$ [v. (2)]. Semidreapta MQ este situată, prin urmare, în interiorul unghiului CMM'', deci punctul Q se află în interiorul segmentului CM''. Punctele X ale triunghiului ABC, care satisfac condițiile (3), umplu, prin urmare, trapezul $CQMM'$ a cărui bază mare este

$$MM' = \frac{1}{2} b. \tag{5}$$

II. Din teorema U rezultă:

— orice punct X al triunghiului ABC, pentru care $x_1 \geqslant x_2$, este situat în interiorul unghiului ascuțit ACK; (6)

— orice punct X al triunghiului ABC, pentru care $x_2 \geqslant x_3$, este situat în interiorul unghiului ascuțit BAK. (7)

Se notează prin L punctul de intersecție al bisectoarei CK a unghiului BCA cu dreapta O_1. Conform cu egalitățile (4) ΔMBC este isoscel și $\sphericalangle BCM = \sphericalangle CBM = \beta > 45°$ [v. (2)] și, prin urmare, $\sphericalangle BCM > \sphericalangle BCK = 45°$. Din această cauză semidreapta CL se află în interiorul unghiului BCM și conform teoremei W intersectează segmentul MM' în punctul L situat între punctele M și M'. Rezultă astfel că trapezul $CQML$ este o parte a trapezului $CQMM'$ [v. (5)] aflată în interiorul unghiului ACK [v. (6)]. (8)

Rămîne să se determine partea trapezului $CQML$ [v. (8)] care se găsește în interiorul unghiului BAK [v. (7)]. Semidreapta AK este situată în interiorul unghiului CAB (sau unghiului QAM) și conform teoremei W intersectează segmentul QM în punctul P aflat între punctele Q și M. Centrul K al cercului înscris în ΔABC este situat, evident, în interiorul triunghiului ABC. Se va demonstra că acesta este situat în interiorul segmentului CL.

În ΔKBC, $\hat{B} = \frac{1}{2}\beta$, $\hat{C} = 45°$, însă $\frac{\beta}{2} < 45°$ și, prin urmare,

$\hat{B} < \hat{C}$. În ΔKBC unghiului mai mare C i se opune latura mai mare, deci $KC < KB$ şi conform teoremei V (aplicată în cazul inegalităţii) punctul K se află în semiplanul O_1C şi deci, în mod necesar, în interiorul segmentului CL.

Punctul P se află, prin urmare, în interiorul segmentului QM, iar punctul K în interiorul segmentului CL. Din această cauză, partea trapezului $CQML$, mărginită de unghiul BAK, este patrulaterul $KPML$. În rezolvare au fost folosite teoremele U şi V care descriu mulţimi de puncte avînd proprietăţile date. Patrulaterul $KPML$ va fi deci mulţimea tuturor punctelor care satisfac cerinţele problemei.

237. Vor fi folosite notaţiile din fig. 104. Cu $t_1 = PT_1$ şi $t_2 = PT_2$ se notează tangentele la cercul de rază r şi centru S_1, respectiv la cercul k_2 de rază r şi centru S_2 în punctul lor comun P. Fie O mijlocul segmentelor PQ şi S_1S_2. Unghiurile $\varphi = \sphericalangle T_1PU$ şi $\varphi' = \sphericalangle T_2PV$ sînt opuse la vîrf şi adiacente cu unghiul $\omega = \sphericalangle T_1PT_2$. Se notează cu U punctul de intersecţie al dreptei t_2 cu cercul k_1 ($U \not\equiv P$) şi

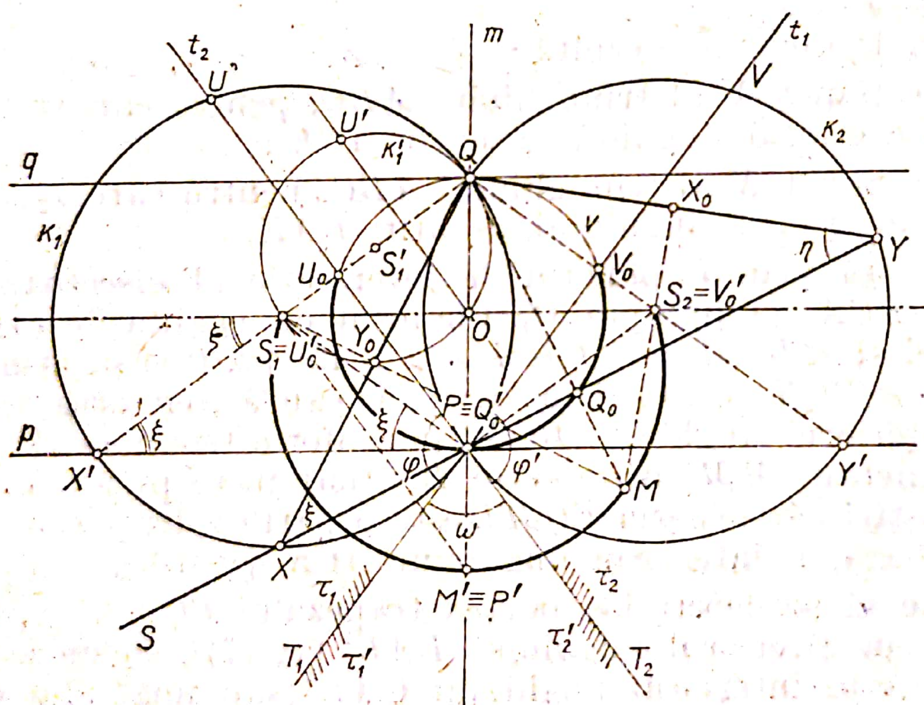


Fig. 104

analog punctul V este al doilea punct de intersecţie al dreptei t_1 cu cercul k_2.

Se va numi dreaptă de tipul s o dreaptă care are, în afară de punctul P, punctele X şi Y comune cu cercurile k_1, respectiv k_2,

punctul P fiind situat între punctele X şi Y. Este evident că orice dreaptă care trece prin punctul P şi se află în interiorul unghiului $\varphi = \sphericalangle T_1PU = \sphericalangle T_2PV$, este dreaptă de tipul s; toate celelalte drepte care trec prin punctul P nu sînt drepte de tipul s.

Se notează $\xi = \sphericalangle PXQ$, $\eta = \sphericalangle PYQ$. Se arată că $\xi = \eta$, în felul următor. Unghiul ξ este unghi cu vîrful pe cercul k_1 şi se sprijină pe arcul PQ al acestui cerc, în mod analog unghiul η se sprijină pe arcul PQ al cercului k_2. Cele două arce sînt egale din motive de simetrie şi deci $\sphericalangle PS_1Q = \sphericalangle PS_2Q$, deci $\xi = \eta$. În consecinţă, ΔQXY este isoscel şi are vîrful Q. Se vede, în continuare, că toate triunghiurile QXY sînt asemenea între ele, avînd unghiurile de aceeaşi mărime (egală cu jumătate din arcul PQ). Acest fapt va fi folosit la punctul b) al problemei.

a) Se notează mijloacele laturilor XY, YQ şi QX ale triunghiului QXY cu Q_0, X_0 şi Y_0 respectiv.

T e o r e m a V_1. Mulţimea punctelor Q_0 este formată din toate punctele interioare arcului U_0PV_0 ale cercului V de centru O şi rază OP, O fiind mijlocul segmentelor S_1S_2 şi PQ, iar punctele U_0, V_0 sînt mijloacele segmentului PU, respectiv PV.

D e m o n s t r a ţ i e. Se consideră triunghiul dreptunghic PQQ_0 avînd ipotenuza PQ. Punctul Q_0 se găseşte în acest caz pe cercul v de diametru PQ, fiind situat neapărat în interiorul arcului U_0PV_0 (U_0 şi V_0 fiind mijloacele coardelor PU şi PV), deoarece aceste puncte se află în unul din unghiurile φ', φ. Dacă $Q_0 \neq P$ este un punct al acestui arc, dreapta PQ este o dreaptă de tipul s iar Q_0 este, evident, mijlocul respectivului segment XY.

T e o r e m a V_2. Mulţimea punctelor Y_0 este formată din toate punctele interioare arcului OS_1U' al cercului k_1', transformat al cercului k_1 prin omotetia de centru Q şi raport $\frac{1}{2}$; U' este mijlocul segmentului QU. (O teoremă analoagă subsistă pentru punctele X_0.)

D e m o n s t r a ţ i e. Punctul Y_0 este transformat al punctului X prin omotetia de centru Q şi raport $\frac{1}{2}$. Punctele O şi U' sînt transformate ale punctelor P şi U prin această omotetie. Transformatele punctelor X ale arcului Ω prin această omotetie se află pe arcul OS_1U' al cercului construit pe segmentul S_1Q ca diametru (punctul S_1 este transformatul punctului X', diametral opus lui Q pe cercul

k_1). Reciproc, orice punct care se găsește în interiorul arcului de cerc OS_1U' este, evident, imagine a mijlocului Y_0 al unei laturi QX a unui triunghi de tipul QXY. Această demonstrare a teoremei V_2 rezolvă punctul a) al problemei.

b) S-a demonstrat deja, că oricare două triunghiuri QXY, $QX'Y'$, care îndeplinesc condițiile problemei, sînt asemenea. Se notează cu M și M' centrele cercurilor circumscrise acestor triunghiuri. Acestea sînt situate pe semidreptele QQ_0 și respectiv QQ_0', Q_0 și Q_0' fiind mijloacele bazelor XY și $X'Y'$. Are loc din această cauză egalitatea

$$\frac{QM}{QQ_0} = \frac{QM'}{QQ_0'} = \lambda, \tag{1}$$

λ fiind o constantă oarecare. Prin urmare, $QM = \lambda QQ_0$. Punctele M și M' sînt respectiv imaginile punctelor Q_0, P, în omotetia de centru Q și raport λ. De aceea punctele M umplu interiorul arcului $U_0'M'V_0'$, care este transformatul prin omotetia de mai sus al arcului U_0PV_0.

Reciproc, punctului M ales în interiorul arcului $U_0'M'V_0'$ îi corespunde prin omotetia inversă punctului Q_0 în interiorul arcului U_0PV_0. Se știe deja că fiecărui astfel de punct Q_0 îi corespunde unic un triunghi QXY pentru care Q_0 este centru al cercului circumscris.

Mulțimea centrelor cercurilor circumscrise triunghiurilor OXY este mulțimea tuturor punctelor interioare unui anumit arc de cerc $S_1P'S_2$ pentru care secanta PQ este axă de simetrie ($S_1 \equiv U_0'$, $S_0 \equiv$ $\equiv V_0'$).

Constanta λ poate fi exprimată cu ajutorul numerelor r și t, $2t$ fiind lungimea coardei comune PQ a celor două cercuri k_1 și k_2. Se obține

$$\lambda = \frac{QU_0'}{QU_0}, \quad QU_0' = QS_1 = r, \quad QU_0 = PQ \cdot \sin\xi = \frac{2t^2}{r}, \quad \text{deci} \quad \lambda = \frac{r^2}{2t^2}.$$

238. Funcția $y = y(x)$ este strict pozitivă, deoarece termenul $|1 + \sqrt{4 - x^2}|$ este un număr pozitiv, termenul $|1 - \sqrt{4 - x^2}|$ este număr nenegativ pentru orice x, pentru care $4 - x^2 \geqslant 0$ sau

$$-2 \leqslant x \leqslant 2. \tag{1}$$

Deoarece $y(x) = y(-x)$ pentru orice x satisfăcînd dubla inegalitate (1), graficul acestei funcții este simetric față de axa Oy.



Se consideră două posibilități.

C a z u l (a). Fie $1-\sqrt{4-x^2} \geqslant 0$ sau $1 \geqslant \sqrt{4-x^2}$; prin ridicarea la pătrat a ambilor membri ai acestei inegalități se obține că aceasta are loc pentru următoarele valori ale lui x:

$$x \geqslant \sqrt{3} \text{ sau } x \leqslant -\sqrt{3}. \tag{2}$$

Astfel $|1-\sqrt{4-x^2}| = 1-\sqrt{4-x^2}$ și din modul de definire al lui y se obține că

$$y = \frac{1}{2}[1+\sqrt{4-x^2}+1-\sqrt{4-x^2}] = 1 \tag{3}$$

sau $y = 1$.

Ținînd seama de relațiile (1), (2) și de rezultatul găsit (3), se deduce că graficul funcției $y(x)$ este dat pe intervalele $[-2, -\sqrt{3}]$ și $[\sqrt{3}, 2]$ de segmente ale dreptei de ecuație $y = 1$ (fig. 105).

C a z u l (b). Fie $1-\sqrt{4-x^2} \leqslant 0$ sau $1 \leqslant \sqrt{4-x^2}$; prin ridicarea la pătrat a ambilor membri ai acestei inegalități se obține că aceasta este îndeplinită pentru valorile

$$-\sqrt{3} \leqslant x \leqslant \sqrt{3}. \tag{4}$$

În acest caz $|1-\sqrt{4-x^2}| = \sqrt{4-x^2}-1$, iar din definiția lui y se găsește

$$y = \frac{1}{2}(1+\sqrt{4-x^2}+\sqrt{4-x^2}-1) = \sqrt{4-x^2}$$

sau $y = \sqrt{4-x^2}$. Prin ridicarea la pătrat a ambilor membri ai acestei egalități se obține

$$x^2+y^2 = 4, \tag{5}$$

deci punctele respective ale graficului funcției $y = y(x)$ se află pe cercul de rază 2 avînd centrul în originea coordonatelor. În acest caz $y > 0$ și este vorba despre punctele cercului de ecua-

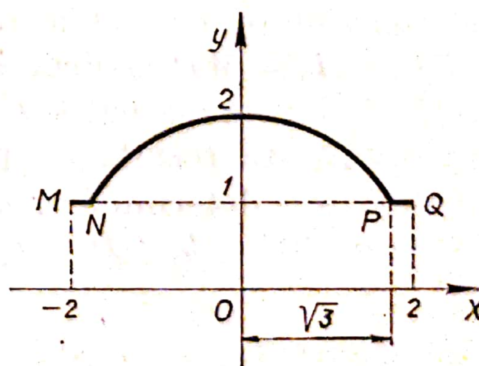


Fig. 105

ție (5) ale căror puncte au abscisa x satisfăcînd condițiile (4). Pentru $x = \pm\sqrt{3}$ și $y > 0$ se obține din ecuația (5) că $y = 1$. În consecință, pe intervalul $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ graficul funcției (1) este un arc de cerc avînd centrul în originea sistemului de coordonate și raza 2, aflat deasupra axei Ox.

Fig. 106

239. A n a l i z a   c o n s t r u c ț i e i. Se notează cu M punctul de intersecție al dreptelor AD și BC. Se observă că omotetia de centru M care transformă punctul A în punctul P, transformă segmentul AB în segmentul PQ iar punctul B în punctul Q. Aceeași omotetie transformă segmentul AQ în segmentul PC (deoarece $PC \parallel AQ$), deci transformă punctul Q în punctul C. Rezultă astfel că segmentul QP se transformă în segmentul CD și, în consecință, punctul P se transformă în punctul D. Fie $x > 0$ raportul omotetiei, găsindu-se astfel că $MP = x \cdot MA$, $MD = x \cdot MP$. Prin împărțirea membru cu membru a acestor două relații se ajunge la egalitatea

$$\frac{MP}{MD} = \frac{MA}{MP},$$

adică $MP^2 = MA \cdot MD$.

Rezultă astfel următoarea c o n s t r u c ț i e. Pe segmentul MA ca diametru se construiește cercul k. Se construiește apoi perpendiculara în D pe dreapta MA și fie R punctul de intersecție al acestei perpendiculare cu semicercul k. Rezultă din teorema catetei că $MR^2 = MA \cdot MD$ și deci $MP = MR$, punctul P fiind astfel construit. Din cele de mai sus rezultă că punctul P este cel căutat. Din analiza făcută rezultă că problema are rezolvare unică.

Pentru a determina lungimile segmentelor PA și BQ se notează $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$. Evident,

$$x = \sqrt{\frac{c}{a}}. \qquad (1)$$

$PA \cdot (x + 1) = d$, iar prin înlocuirea lui x din egalitatea (1) se găsește

$$\left(\sqrt{\frac{c}{a}} + 1\right) \cdot PA = d,$$

adică $(\sqrt{c} + \sqrt{a})\, PA = d\sqrt{a}$, deci $PA = \dfrac{d\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{c}}$. Se poate obține în mod analog că $BQ = \dfrac{b\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{c}}$.

240. Se pune sin 1 sub forma

$$\sin 1 = \sin[k - (k - 1)] = \sin k \cos(k - 1) - \cos k \sin(k - 1).$$

Cel de al k-lea termen se va scrie

$$\frac{\sin 1}{\cos(k-1)\cos k} = \frac{\sin k \cos(k-1) - \cos k \sin(k-1)}{\cos(k-1)\cos k} =$$

$$= \operatorname{tg} k - \operatorname{tg}(k - 1). \qquad (1)$$

Deoarece k este întreg, $k \neq \dfrac{\pi}{2} \cdot m$ oricare ar fi m întreg și deci $\cos k \neq 0$ oricare ar fi k întreg, egalitatea de mai sus fiind adevărată pentru orice valori întregi k. Aplicînd în continuare relația (1) fiecărui termen, se obține

$$\frac{\sin 1}{\cos 0 \cos 1} + \frac{\sin 1}{\cos 1 \cos 2} + \frac{\sin 1}{\cos 2 \cos 3} + \ldots + \frac{\sin 1}{\cos(n-1)\cos n} =$$

$$= (\operatorname{tg} 1 - \operatorname{tg} 0) + (\operatorname{tg} 2 - \operatorname{tg} 1) + (\operatorname{tg} 3 - \operatorname{tg} 2) + \ldots$$

$$\ldots + [\operatorname{tg} n - \operatorname{tg}(n - 1)] = \operatorname{tg} n - \operatorname{tg} 0 = \operatorname{tg} n.$$

241. Se notează $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$, $AD = a'$, $BD = b'$, $CD = c'$. Egalitățile date iau forma

$$a^2 + a'^2 = b^2 + b'^2 = c^2 + c'^2. \qquad (1)$$

Se va arăta că cele trei unghiuri din fiecare vîrf al tetraedrului sînt simultan ascuțite, drepte sau obtuze.

Fie, de exemplu, unghiurile din vîrful A. Se notează (fig. 107) $\sphericalangle BAD = \varphi$, $\sphericalangle CAD = \psi$, $\sphericalangle BAC = \omega$.

Din teorema cosinusului se obține

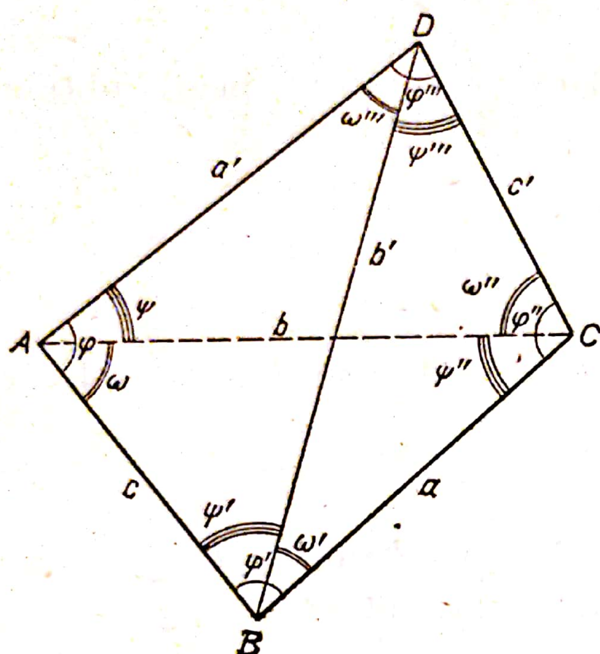


Fig. 107

$$2a'c \cos \varphi = a'^2 + c^2 - b'^2, \quad (2)$$
$$2a'b \cos \psi = a'^2 + b^2 - c'^2, \quad (3)$$
$$2bc \cos \omega = b^2 + c^2 - a^2. \quad (4)$$

Folosind egalitățile (1), membrii din dreapta ai egalităților (2) și (3) se scriu sub forma

$$a'^2 + c^2 - b'^2 = (c^2 + c'^2 - a^2) + c^2 - (c^2 + c'^2 - b^2) = c^2 + c'^2 - a^2 + c^2 - c^2 - c'^2 + b^2 = b^2 + c^2 - a^2,$$

$$a'^2 + b^2 - c'^2 = (b^2 + b'^2 - a^2) + b^2 - (b^2 + b'^2 - c^2) = b^2 + b'^2 - a^2 + b^2 - b^2 - b'^2 + c^2 = b^2 + c^2 - a^2.$$

Membrii din dreapta ai egalităților (2) și (3) sînt egali cu membrul drept al egalității (4). Prin urmare, $2a'c \cos \varphi = 2a'b \cos \psi = 2bc \cos \omega$. Deoarece lungimile muchiilor tetraedrului sînt exprimate prin numere pozitive, $\cos \varphi$, $\cos \psi$, $\cos \omega$ sînt fie simultan pozitive, fie se anulează simultan, fie sînt negative. Deoarece A este un vîrf arbitrar al tetraedrului, toate trei unghiurile din fiecare vîrf al acestuia sînt simultan ascuțite, respectiv simultan drepte sau obtuze.

Nu se pot întîlni unghiuri drepte sau obtuze în mai mult de un vîrf al tetraedrului, deoarece în caz contrar s-ar găsi cel puțin o față a tetraedrului, adică un triunghi, care ar avea mai mult de un unghi drept sau obtuz, ceea ce nu este posibil. Dacă în toate vîrfurile tetraedrului unghiurile sînt ascuțite, afirmația din enunț este satisfăcută. Dacă într-unul din vîrfuri, de exemplu în A, unghiurile sînt drepte sau obtuze, toate unghiurile feței opuse acestui vîrf vor fi ascuțite. În cazul de față ΔBCD este ascuțit. Afirmația din enunț este, astfel, complet demonstrată.

242. Dacă $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ constituie o soluție a sistemului, nici unul din numerele x_i nu este egal cu zero.

În cazul $n = 2$, sistemul devine

$$\begin{cases} x_1x_2 = a_1, \\ x_2x_1 = a_2. \end{cases}$$

Se deduce $\frac{x_1x_2}{x_2x_1} = \frac{a_1}{a_2}$ sau $1 = \frac{a_1}{a_2}$; $a_1 = a_2$. Pentru $a_1 = a_2$ sistemul este compatibil nedeterminat, iar dacă $a_1 \neq a_2$, sistemul este incompatibil.

În cazul $n = 3$, sistemul ia forma

$$\begin{cases} x_1x_2 = a_1, & (1) \\ x_2x_3 = a_2, & (2) \\ x_3x_1 = a_3. & (3) \end{cases}$$

Înmulțind relațiile (1) și (3) și împărțind apoi prin relația (2), se găsește

$$x_1^2 = \frac{a_1a_3}{a_2}. \tag{4}$$

Deoarece $\frac{a_1a_3}{a_2} > 0$, ecuația (4) are două rădăcini. Fiecărei valori a lui x_1 din ecuația întîi și a treia îi corespund valori ale lui x_2 și x_3. Pentru $n = 3$ sistemul va avea deci totdeauna două soluții.

În continuare se studiază sistemul pentru n arbitrar.

C a z u l a. $n \geqslant 2$, n par. În acest caz

$$(x_1x_2)(x_3x_4) \ldots (x_{n-1}x_n) = (x_2x_3)(x_4x_5) \ldots (x_nx_1). \tag{5}$$

Înlocuind valorile produselor luate din sistemul dat, se obține

$$a_1a_3 \ldots a_{n-1} = a_2a_4 \ldots a_n. \tag{6}$$

Condiția obținută este necesară pentru existența soluțiilor. Dacă este satisfăcută condiția (6), sistemul are o infinitate de soluții. Într-adevăr, pentru orice $x_1 \neq 0$ din primele $n - 1$ ecuații ale sistemului pot fi găsite succesiv valorile lui $x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$. Trebuie

să se arate că x_1 şi x_n satisfac şi ultima ecuaţie a sistemului. Într-adevăr

$$x_n x_1 = \frac{(x_1x_2)(x_3x_4)\ldots(x_{n-1}x_n)}{(x_2x_3)(x_4x_5)\ldots(x_{n-2}x_{n-1})} = \frac{a_1a_3\ldots a_{n-1}}{a_2a_4\ldots a_{n-2}}, \tag{7}$$

şi conform relaţiei (6) membrul al doilea al egalităţii (7) este a_n, deci $x_nx_1 = a_n$. În acest caz, dacă este îndeplinită condiţia (6), sistemul este compatibil nedeterminat.

C a z u l b. Fie n impar. Se obţine

$$\frac{(x_1x_2)(x_3x_4)\ldots(x_nx_1)}{(x_2x_3)(x_4x_5)\ldots(x_{n-1}x_n)} = \frac{a_1a_3\ldots a_n}{a_2a_4\ldots a_{n-1}} \tag{8}$$

sau

$$x_1^2 = \frac{a_1a_3\ldots a_n}{a_2a_4\ldots a_{n-1}}. \tag{9}$$

Din această relaţie se găsesc două valori pentru x_1. Pentru fiecare din acestea se găsesc succesiv din sistemul dat valorile celorlalte necunoscute. Se arată că valorile lui x_1 şi x_n satisfac şi ultima ecuaţie. Într-adevăr,

$$\frac{x_1}{x_n} = \frac{(x_1x_2)(x_3x_4)\ldots(x_{n-2}x_{n-1})}{(x_2x_3)(x_4x_5)\ldots(x_{n-1}x_n)} = \frac{a_1a_3\ldots a_{n-2}}{a_2a_4\ldots a_{n-1}}.$$

Din egalitatea (9) se deduce

$$\frac{a_1a_3\ldots a_{n-2}}{a_2a_4\ldots a_{n-1}} = \frac{x_1^2}{a_n}.$$

În consecinţă, $\frac{x_1}{x_n} = \frac{x_1^2}{a_n}$, deci $x_1x_n = a_n$.

Astfel, cînd n este impar, sistemul are totdeauna două soluţii. Pentru n par sistemul are o infinitate de soluţii cînd $a_1a_3\ldots a_{n-1} = a_2a_4\ldots a_n$, iar dacă $a_1a_3\ldots a_{n-1} \neq a_2a_4\ldots a_n$, sistemul nu admite soluţii.

243. Fără a restrînge generalitatea raţionamentelor, se poate presupune că

$$a \leqslant b \leqslant c. \tag{1}$$

Dacă $a \geqslant 3$, $ab + bc + ac \leqslant 3bc \leqslant abc$. (2)

Aceste relații devin egalități numai cînd $a = b = c = 3$. Inegalitatea (2) contrazice inegalitatea dată. Rezultă că $a < 3$, adică $a = 2$. În acest caz din inegalitatea

$$abc < ab + bc + ac, \tag{3}$$

se deduce că $2bc < 2b + bc + 2c$, adică $2b + 2c > bc$ sau $\frac{1}{c} + \frac{1}{b} > \frac{1}{2}$. Dacă $c \geqslant b \geqslant 5$, înseamnă că $\frac{1}{b} \leqslant \frac{1}{5}$, $\frac{1}{c} \leqslant \frac{1}{5}$ și $\frac{1}{c} + \frac{1}{b} \leqslant \frac{2}{5} < \frac{1}{2}$, adică inegalitatea (3) nu este îndeplinită. Astfel, în cazul $a = 2$ trebuie fie ca $b = 2$, caz în care c poate fi orice număr prim, fie $b = 3$, caz în care fie $c = 3$, fie $c = 5$.

244. Baza piramidei este rombul $ABCD$ (fig. 108). Se notează cu φ unghiul format de diagonala AC a rombului cu latura AB. Fiindcă $\varphi < 90°$, $OD = OB = \sin\varphi$, iar $OA = OC = \cos\varphi$.

Fără a restrînge generalitatea, se poate nota $AS = x$. Triunghiul BSD este isoscel, iar $\Delta SDB = \Delta CDB$, ceea ce înseamnă că $SO = AO = \cos\varphi$. În planul ASC se constată că $AS = x$, $SC = 1$, $AO = OC = OS = \cos\varphi$, deci punctele A, S și C sînt situate pe un cerc avînd centrul în O și raza egală cu $\cos\varphi$. Unghiul ASC este drept fiindcă are vîrful pe cerc și se sprijină pe diametru. De aceea $SC^2 + AS^2 = AC^2$ sau $1 + x^2 = 4\cos^2\varphi$, găsindu-se $x = \sqrt{4\cos^2\varphi - 1}$. Înălțimea $h = SE$ a triunghiului ASC se găsește din formula care exprimă aria triunghiului ASC:

$$\frac{1}{2} SE \cdot AC = \frac{1}{2} SC \cdot AS \quad \text{sau} \quad h\cos\varphi = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{4\cos^2\varphi - 1}.$$

Rezultă că $h = \sqrt{1 - \frac{1}{4\cos^2\varphi}}$ SE este lungimea înălțimii piramidei $SABCD$ (demonstrația este propusă cititorului).

Aria rombului $ABCD$ va fi

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} 2\cos\varphi \, 2\sin\varphi =$$

$$= \sin 2\varphi,$$

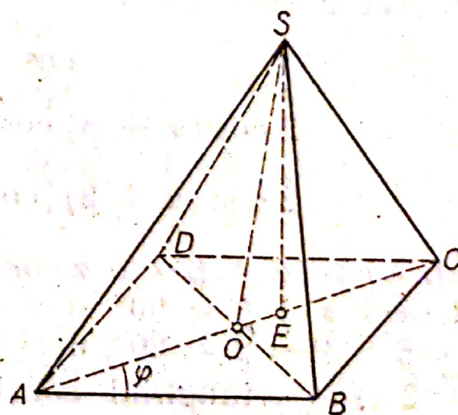


Fig. 108

ceea ce conduce la evaluarea volumul piramidei

$$V = \frac{1}{3} \sin 2\varphi \sqrt{1 - \frac{1}{4\cos^2\varphi}}.$$

Din egalitatea $1 + x^2 = 4\cos^2 \varphi$ se obține $2\sin \varphi = \sqrt{3 - x^2}$, deci se poate exprima $\sin 2\varphi$ prin x astfel:

$$\sin 2\varphi = 2 \sin\varphi \cos\varphi = \frac{1}{2}\sqrt{1 + x^2}\sqrt{3 - x^2},$$

ceea ce înseamnă că $V = \frac{x}{6}\sqrt{3 - x^2}$. Volumul V este maxim în același timp cu V^2 și cu $36V^2 = x^2(3 - x^2)$. Făcîndu-se notația $36V^2 = y$ și $x^2 = t$, se constată că maximul funcției $y = t(3 - t) = -t^2 + 3t$ este realizat pentru $t = \frac{3}{2}$. În acest caz $V_{max} = \frac{1}{6}\sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{3 - \frac{3}{2}} = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{4}$.

245. 1. Se presupune că între mărimile α, β, γ ale unghiurilor triunghiului ABC are loc relația $\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = -1$. Se demonstrează că acesta este dreptunghic. Egalitatea se transcrie folosind formulele de transformare a sumei de cosinusuri în produs:

$$2 \cos (\alpha + \beta) \cos (\alpha - \beta) + \cos 2\gamma + 1 = 0,$$

$$2 \cos (\alpha + \beta) \cos (\alpha - \beta) + 2 \cos^2 \gamma = 0, \quad \gamma = \pi - (\alpha + \beta).$$

De aceea

$$\cos \gamma = -\cos (\alpha + \beta).$$

$$2 \cos (\alpha + \beta) \cos (\alpha - \beta) + 2 \cos^2 (\alpha + \beta) = 0,$$

$$2 \cos (\alpha + \beta) [\cos (\alpha - \beta) + \cos (\alpha + \beta)] = 0,$$

sau $4 \cos (\alpha + \beta) \cos \alpha \cos \beta = 0$. Prin urmare, sau $\cos (\alpha + \beta) = 0$ și deci $\alpha + \beta = 90°$ și $\gamma = 90°$, sau $\cos \alpha = 0$, deci $\alpha = 90°$, sau $\cos \beta = 0$ și $\beta = 90°$, deci triunghiul este dreptunghic.

2. Fie triunghiul considerat dreptunghic. Se demonstrează că în acest caz suma cosinusurilor unghiurilor 2α, 2β, 2γ este -1

Fie, de exemplu, $\alpha = 90°$. Rezultă că

$$\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = -1 + \cos 2\beta + \cos 2\gamma =$$
$$= -1 + 2\cos(\beta+\gamma)\cos(\beta-\gamma) = -1,$$

deoarece $\beta + \gamma = 90°$ și $\cos(\beta + \gamma) = 0$.

246. $N = n^3+3n^2 - n-3=n^2(n+3) -(n+3)=(n^2-1)(n+3) = (n-1)(n+1)(n+3)$. Numărul N se scrie deci ca produs a trei numere pare consecutive. Se poate considera $n = 2k+1$, k fiind un număr întreg nenegativ. Numărul N va avea forma $N = 2k(2k+2)(2k+4) = 8k(k+1)(k+2)$. Fiindcă n conține trei factori întregi consecutivi, cel puțin unul din aceștia este par, iar unul este multiplu de trei. Produsul se divide, evident, prin

$$8 \cdot 2 \cdot 3 = 48.$$

247. Semnul de inegalitate, deocamdată necunoscut, se notează cu $\vee$. Astfel,

$$\sqrt{7} + \sqrt{10} \vee \sqrt{19} + \sqrt{3}. \tag{1}$$

Deoarece radicalii sînt pozitivi, ambii membri ai inegalității sînt pozitivi. Se poate ridica la pătrat atît membrul întîi cît și cel de-al doilea fără a schimba sensul inegalității, obținîndu-se astfel $7 + 10 + 2\sqrt{70} \vee 19 + 3 + 2\sqrt{57}$, inegalitate echivalentă cu

$$2\sqrt{70} \vee 5 + 2\sqrt{57}. \tag{2}$$

Ridicînd ambii membri din nou la pătrat, sensul inegalității se păstrează, găsind că

$$280 \vee 25 + 228 + 20\sqrt{57} \quad \text{sau} \quad 27 \vee 20\sqrt{57}.$$

O nouă ridicare la pătrat conduce la $729 \vee 22800$. Semnul $\vee$ este deci $<$, raționamentele anterioare arătînd că

$$\sqrt{7} + \sqrt{10} < \sqrt{19} + \sqrt{3}.$$

248. Se notează numărul necunoscut, scris ATOM, cu litera x, x fiind un număr de patru cifre. Prin urmare,

$$1000 < x < 10\,000. \tag{1}$$

Condițiile problemei impun ca x să fie format din cifre diferite. Ultima cifră nu poate fi zero, deoarece în caz contrar ultimele două cifre ale rezultatului ar fi zerouri.

Rezultatul înmulțirii este x^2. Pe de altă parte, dacă din acesta se scade numărul x, se obține un număr care se termină cu patru zerouri, adică $x^2 - x = n \cdot 10^4$, unde n este un număr natural. Egalitatea se poate transcrie sub forma $x(x-1) = n \cdot 10^4$, deci x nu se poate termina cu zerouri și $x - 1$ nu poate fi multiplu de 10^4, iar x și $x - 1$ sînt relativ prime, înseamnă că pot fi realizate două situații: sau x conține cel puțin patru factori 2 și $x - 1$ patru factori 5 (cazul 1), sau, invers, x conține cel puțin patru factori 5 și $x - 1$ patru factori 2 (cazul 2).

În continuare se examinează aceste cazuri.

a) $x = 16k$, $x - 1 = 625m$, adică $x = 625m + 1$ $(m < 16)$. Înseamnă că $625m + 1 = 16k$ sau $39 \cdot 16m + m + 1 = 16k$. Egalitatea este posibilă cînd $m + 1 = 16$, adică $m = 15$. Rezultă $x = 9376$.

b) $x - 1 = 16k$, $x = 16k + 1$, $x = 625m$ $(m \leqslant 16)$. În acest caz $625m = 16k + 1$ sau $625m - 1 = 16k$. Separînd în membrul întîi un termen multiplu de 16, se obține $39 \cdot 16m + m - 1 = 16k$. Cea mai mică valoare a lui m care satisface egalitatea este 17. În acest fel, cazul b) nu este posibil.

Răspuns:
$$\begin{array}{r} 9376 \cdot 9376 \\ \hline 84384 \\ 28128 \\ 65632 \\ 56256 \\ \hline 87909376 \end{array}$$

249. a) $p = 30q + r(1)$,
p fiind numărul dat, q cîtul iar r restul la împărțirea lui p la 30, $0 < r < 30$. Se verifică ușor că toate numerele compuse mai mici decît 30 au divizori comuni cu 30. Din egalitatea (1) rezultă că dacă r este număr compus, acesta va avea divizori comuni cu 30, iar p trebuind să fie divizibil cu acești divizori comuni, ceea ce contrazice ipoteza. Prin urmare, r trebuie să fie număr prim.

b) Afirmația nu este adevărată pentru 60. Există un număr compus mai mic decît 60 care să nu aibă divizori comuni cu 60: numărul 49.

Exemplu: $p = 109$, $109 = 60 \cdot 1 + 49$.

250. Se introduc următoarele notații pentru numitori:

$$b^2 + c^2 = x,\quad c^2 + a^2 = y,\quad a^2 + b^2 = z,$$

(evident, $x>0$, $y>0$, $z>0$) și se exprimă relația în x, y, z:

$$a^2 = \frac{y+z-x}{2}, \quad b^2 = \frac{x+z-y}{2}, \quad c^2 = \frac{x+y-z}{2}.$$

$$\frac{y+z-x}{2x} + \frac{x+z-y}{2y} + \frac{x+y-z}{2z} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Inegalitatea se transformă succesiv:

$$\frac{y}{x} + \frac{z}{x} - 1 + \frac{y}{x} + \frac{z}{y} - 1 + \frac{x}{z} + \frac{y}{z} - 1 \geqslant 3,$$

$$\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x}\right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right) \geqslant 6.$$

Ultima inegalitate este însă o consecință a cunoscutei inegalități adevărate pentru orice $\alpha>0$, $\beta>0$: $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \geqslant 2$.

251. Fie $ABCD$ tetraedrul dat (fig. 109), ale cărui fețe sînt echivalente. Se va demonstra că acestea sînt egale.

Prin AB se duce planul α paralel cu CD. Fie C' și D' proiecțiile punctelor C și D pe planul α, iar E punctul de intersecție al segmentelor AB și $C'D'$.

Prin punctele C' și D' se duc perpendicularele pe segmentul AB, picioarele cărora se notează cu M și N. Conform teoremei celor trei perpendiculare segmentele CM și DN sînt perpendiculare pe AB și vor fi, în consecință, înălțimi în triunghiurile ABC, respectiv ABD. Deoarece, prin enunț, ariile acestor două triunghiuri sînt egale, iar latura AB este comună, $CM = DN$. Din triunghiurile dreptunghice $CC'M$ și $DD'N$ în care $CM = DN$ și $CC' = DD'$ rezultă că $C'M = D'N$, obținînd astfel că triunghiurile dreptunghice MEC' și NED' sînt egale (avînd egale cîte un unghi ascuțit și cîte o catetă). Înseamnă că E este mijlocul segmentului $C'D'$.

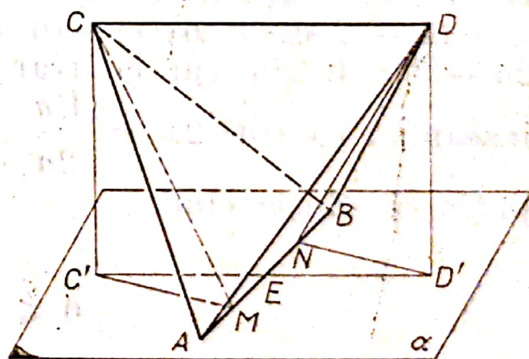


Fig. 109

Fiindcă muchiile AB şi CD intervin simetric în raţionamentele făcute, proiecţia laturii AB pe planul care trece prin CD şi este paralel cu AB, deci cu planul α, va înjumătăţi segmentul CD. Proiecţia lui CD pe planul α va înjumătăţi deci segmentul AB, adică $AE = EB$. Deoarece $C'E = ED'$, înseamnă că $AC'BD'$ este paralelogram, adică $AC' = BD'$ şi $AD' = C'B$. De aceea $AC = BD$ şi $CB = AD$.

Repetînd aceleaşi raţionamente pentru altă pereche de muchii (diferite de AB şi CD), se obţine că $AB = CD$, ceea ce înseamnă că toate feţele tetraedrului sînt triunghiuri egale între ele.

Fie sfera circumscrisă tetraedrului. Prin fiecare faţă a tetraedrului se duce planul care o conţine. Intersecţia sferei cu fiecare din aceste plane este cercul circumscris respectivei feţe a tetraedrului. Din egalitatea triunghiurilor care constituie feţele tetraedrului rezultă egalitatea cercurilor circumscrise acestora. Deoarece toate aceste secţiuni egale ale sferei sînt egal depărtate de centru, rezultă că acesta va constitui şi centrul sferei înscrise în tetraedru.

252. Pentru orice valori reale ale lui x au loc egalităţile:

$$\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^4 x + 2\sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x) - 2\sin^2 x\cos^2 x = 1 - 2\sin^2 x\cos^2 x,$$

$$\sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^6 x + 3\sin^4 x\cos^2 x + 3\sin^2 x\cos^4 x + \cos^6 x) - 3\sin^2 x\cos^2 x(\sin^2 x + \cos^2 x) = (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3\sin^2 x\cos^2 x = 1 - 3\sin^2 x\cos^2 x.$$

De aceea ecuaţia dată este echivalentă cu ecuaţia $1-3\sin^2 x\cos^2 x = a(1 - 2\sin^2 x\cos^2 x)$ sau $(2a-3)\sin^2 x\cos^2 x = a - 1$. Deoarece $2a - 3 = 0$ (în caz contrar s-ar obţine $a=1$, ceea ce nu se poate), înseamnă că $\sin^2 2x = \frac{4(a-1)}{2a-3}$. Ecuaţia dată va avea astfel cel puţin o soluţie cînd

$$0 \leqslant \frac{4(a-1)}{2a-3} \leqslant 1. \qquad (1)$$

Dacă $2a - 3 > 0$, adică $a > \frac{3}{2}$, se găseşte $0 \leqslant 4a - 4 \leqslant 2a - 3$, deci $2a \leqslant 1$, $a \leqslant \frac{1}{2}$ şi $a > 1$, ceea ce este imposibil. Dacă $a \leqslant 1$ şi

$2a-3<0$, adică $a<\frac{3}{2}$, se găsește $0\geqslant 4a-4\geqslant 2a-3$, $a\geqslant\frac{1}{2}$, adică

$$\begin{cases} a\leqslant 1, \\ a\geqslant \frac{1}{2}, \\ a<\frac{3}{2}. \end{cases} \tag{2}$$

Se deduce astfel că

$$\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant 1. \tag{3}$$

Reciproc, dacă este îndeplinită dubla inegalitate (3), rezultă inegalitățile (2), din care se deduce (1).

Astfel, ecuația dată are cel puțin o rădăcină reală dacă și numai dacă a satisface condiția $\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant 1$.

Dacă $a=\frac{5}{6}$, se obține că

$$\sin^2 2x=\frac{4\left(\frac{5}{6}-1\right)}{2\cdot\frac{5}{6}-3}=\frac{-4\cdot\frac{1}{6}}{\frac{5}{3}-3}=\frac{1}{2},\ \sin 2x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$2x=\pm\frac{\pi}{4}+\pi k,\quad x=\pm\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{2},\ k\in Z.$$

253. a) Fie $u\in M$, $v\in M$. Deoarece $c>0$ și $u\geqslant 0$, $v\geqslant 0$, înseamnă că $w=u\circ v=\frac{u+v}{1+\frac{uv}{c}}\geqslant 0$. Fiindcă $u<c$, $v<c$, rezultă că

$$(c-u)(c-v)>0,\quad cu+cv<c^2+uv,\quad c(u+v)<c^2\left(1+\frac{uv}{c^2}\right)$$

și, prin urmare, $\frac{u+v}{1+\frac{uv}{c^2}}<c$.

Astfel, $u \circ v \in M$. Se obține, oricare ar fi $u, v, w \in M$,

$$(u \circ v) \circ w = \frac{u+v}{1+\frac{uv}{c^2}} \circ w = \frac{c^2(u+v)}{c^2+uv} \circ w = \frac{\frac{c^2(u+v)}{c^2+uv} + w}{1+\frac{\frac{c^2(u+v)}{c^2+uv}\cdot w}{c^2}} =$$

$$= \frac{c^2(u+v)+(c^2+uv)\,w}{c^2+uv+(u+v)\,w} = \frac{c^2(u+v+w)+uvw}{c^2+uv+u \quad +vw},$$

$$u \circ (v \circ w) = u \circ \frac{v+w}{1+\frac{vw}{c}} = u \circ \frac{c^2(v+w)}{c^2+vw} = \frac{u+\frac{c^2(v+w)}{c^2+vw}}{1+\frac{u\cdot\frac{c^2(v+w)}{c^2+vw}}{c^2}} =$$

$$= \frac{u(c^2+vw)+c^2(v+w)}{c^2+vw+u(v+w)} = \frac{c^2(u+v+w)+uvw}{c^2+vw+uv+uw},$$

adică $(u \circ v) \circ w = u \circ (v \circ w)$, ceea ce arată că mulțimea M este semigrup.

b) Relația $u \circ v_1 = u \circ v_2$ fiind adevărată pentru toate elementele din M, rezultă că

$$\frac{u+v_1}{1+\frac{uv_1}{c^2}} = \frac{u+v_2}{1+\frac{uv_2}{c^2}}, \quad (u+v_1)(c^2+uv_2) = (u+v_2)(c^2+uv_1),$$

$$uc^2 + v_1c^2 + u^2v_2 + uv_1v_2 = uc^2 + v_2c^2 + u^2v_1 + uv_1v_2,$$

$$v_1c^2 + u^2v_2 = v_2c^2 + u^2v_1.$$

Se obține astfel că $v_1(c^2 - u^2) = v_2(c^2 - u^2)$. Deoarece $u < c$, $c^2 - u^2 \neq 0$ și, prin urmare, $v_1 = v_2$. Se demonstrează analog că relația $u_1 \circ v = u_2 \circ v$ implică $u_1 = u_2$. Semigrupul M este deci regulat.

254. Se notează $W_2W_3 = S_1$, $W_3W_1 = S_2$, $W_1W_2 = S_3$, $BW_1 = Z_1$, $BW_2 = Z_2$, $BW_3 = Z_3$, $\sphericalangle W_3W_1W_2 = \varphi_1$, $\sphericalangle W_1W_2W_3 = \varphi_2$, $\sphericalangle W_2W_3W_1 = \varphi_3$ (fig. 110). Conform enunțului problemei, punctul B este centrul cercului înscris în $\Delta W_1W_2W_3$. De aceea W_1B, W_2B, W_3B sînt bisectoarele triunghiului $W_1W_2W_3$. Deoarece $S_1 < S_2 < S_3$, rezultă că $\varphi_1 < \varphi_2 < \varphi_3$ și deci

$$\frac{1}{2}\varphi_1 < \frac{1}{2}\varphi_2 < \frac{1}{2}\varphi_3. \qquad (1)$$

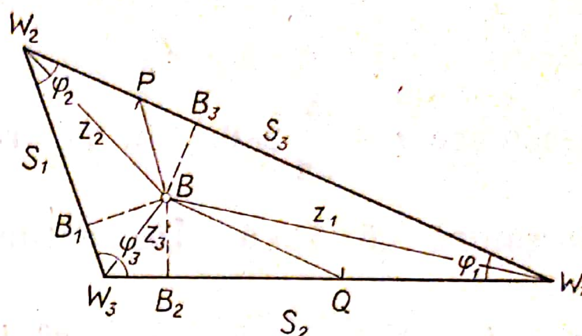


Fig. 110

Din triunghiurile dreptunghice BB_2W_1, BB_3W_2, BB_1W_3, în care $BB_2 = BB_3 = BB_1 = r$, se deduce că

$$Z_1 = \frac{r}{\sin\frac{\varphi_1}{2}}, \quad Z_2 = \frac{r}{\sin\frac{\varphi_2}{2}}, \quad Z_3 = \frac{r}{\sin\frac{\varphi_3}{2}}. \qquad (2)$$

Pe baza relațiilor (1) și (2) se obține $Z_1 > Z_2 > Z_3$.

Există șase itinerarii. Fie r_i $(i = 1, 2, \ldots, 6)$ lungimea acestora. Astfel

$$r_1 = Z_1 + S_3 + S_1 + Z_3, \qquad r_4 = Z_2 + S_1 + S_2 + Z_1,$$
$$r_2 = Z_1 + S_2 + S_1 + Z_2, \qquad r_5 = Z_3 + S_2 + S_3 + Z_2,$$
$$r_3 = Z_2 + S_3 + S_2 + Z_3, \qquad r = Z_3 + S_1 + S_3 + Z_1.$$

Deoarece $r_1 = r_6$, $r_2 = r_4$, $r_3 = r_5$, este suficient să se compare itinerariile r_1, r_2, r_3. Se compară mai întîi r_1 cu r_2. Se poartă în acest scop pe W_1W_2 segmentul $W_1P = W_1W_3$; $\Delta W_1PB = \Delta W_1W_3B$. În consecință, $W_3B = PB = Z_3$, $PW_2 = S_3 - S_2$. Din ΔW_2PB se deduce că $W_2B - PB < W_2P$, adică $Z_2 - Z_3 < S_3 - S_2$ sau $S_2 + Z_2 < S_3 + Z_3$, ceea ce înseamnă că $r_2 < r_1$. Se compară, în continuare, r_2 cu r_3. Se poartă în acest scop pe W_1W_3 segmentul $W_3Q = W_3W_2$; $\Delta W_3QB = \Delta W_3W_2B$ și, prin urmare, $QB = W_2B = Z_2$, $QW_1 = S_2 - S_1$. Din ΔQW_1B se obține că $BW_1 - BQ < QW_1$, adică $Z_1 - Z_2 < S_2 - S_1$ sau $Z_1 + S_1 < Z_2 + S_2$, deci $r_2 < r_3$.

Astfel $r_2 < r_1$ și $r_2 < r_3$. Există, prin urmare, două drumuri minime, anume $BW_1W_3W_2B$ și $BW_2W_3W_1B$. Problema are rezolvare unică, abstracție făcînd de sensul itinerariului.

255. a) Deoarece $0 < \frac{b^2}{4a^2}$,

$$0 < a^2 + b < a^2 + b + \frac{b^2}{4a^2} = \left(a + \frac{b}{2a}\right)^2. \qquad (1)$$

Deoarece $a + \frac{b}{2a} > 0$, din (1) rezultă $\sqrt{a^2 + b} < a + \frac{b}{2a}$. Aceasta înseamnă că $\delta > 0$. În continuare $\sqrt{a^2 + b} + \delta = a + \frac{b}{2a}$, deci $a^2 + b + 2\delta\sqrt{a^2 + b} + \delta^2 = a^2 + b + \frac{b^2}{4a^2}$ sau $2\delta\sqrt{a^2 + b} + \delta^2 = \frac{b^2}{4a^2}$, adică $2a\delta < 2\delta\sqrt{a^2 + b} < \frac{b^2}{4a^2}$, în consecință $2a\delta < \frac{b^2}{4a^2}$ și $\delta < \frac{b^2}{8a^3}$.

b) Deoarece $\frac{b^3}{3a^3} + \frac{b^3}{27a^6} > 0$,

$$0 < a^3 + b < a^3 + b + \frac{b^2}{3a^3} + \frac{b^3}{27a^6} = \left(a + \frac{b}{3a^2}\right)^3 \sqrt[3]{a^3 + b} < a + \frac{b}{3a^2}.$$

Aceasta înseamnă că $\sqrt[3]{a^3 + b} + \delta = a + \frac{b}{3a^2}$, $\delta > 0$. Ridicînd ambii membri ai egalității la cub și efectuînd reducerile, se găsește

$$3(\sqrt[3]{a^3 + b})^2\delta + 3\sqrt[3]{a^3 + b}\,\delta^2 + \delta^3 = \frac{b^2}{3a^3} + \frac{b^3}{27a^6}.$$

Prin neglijarea unor termeni pozitivi se obține dubla inegalitate

$$3a^2\delta < 3(\sqrt[3]{a^3 + b})\delta < \frac{b^2}{3a^2} + \frac{b^3}{27a^6}$$

și deci $\delta < \frac{b^2}{9a^5} + \frac{b^3}{81a^8} = \frac{b^2(9a^3 + b)}{81a^8}$.

Dacă a şi b sînt numere întregi şi $a^3 < a^3 + b < (a+1)^3$, se găseşte că $0 < b < 3a^2 + 3a + 1$ şi fiindcă $a > 1$, $b < 3a^3 + 3a^3 + a^3 = 7a^3$, adică $\delta < \frac{16}{81} \cdot \frac{b^2}{a^5}$.

c) $\sqrt{56} = \sqrt{49 + 7} \approx 7 + \frac{7}{14} = 7{,}5$ cu eroarea $0 < \delta < \frac{7^2}{8 \cdot 7^3} = \frac{1}{56} < 0{,}0179$ (din tabele se obţine $\delta < 0{,}0167$).

$\sqrt[3]{80} = \sqrt[3]{64 + 16} \approx 4 + \frac{16}{3 \cdot 4^2} \approx 4{,}333$. Pentru eroarea δ se obţine $0 < \delta < \frac{16 \cdot 16^2}{81 \cdot 4^5} = \frac{4}{81} \approx 0{,}04905$ (din tabele se obţine $\delta \approx 0{,}024$).

256. În jurul unui punct P al sferei se descrie un cerc k aparţinînd acesteia. Pe cercul k se ia punctul Q şi punctele A, B, astfel ca $AB < PQ$. Din punctele A şi B ca centre se descriu arce de rază AB (fig. 111). Fie C şi D punctele de intersecţie ale acestor arce.

Dacă M este centrul sferei, $AM = BM$, iar prin construcţie $AC = BC$ şi $AD = BD$. Pe de altă parte, $AP = BP$ fiind egale cu raza PQ.

M, P, C, D sînt, prin urmare, puncte ale unui plan perpendicular pe segmentul AB şi trecînd prin mijlocul acestuia (planul mediator al lui AB). Deoarece acest plan trece prin centrul M al sferei, va conţine un cerc mare a cărui rază este egală cu raza sferei.

Se va construi acest cerc. În acest scop se va construi pe o foaie de hîrtie un triunghi avînd laturile egale cu segmentele PC, CD şi PD. Raza cercului care se circumscrie triunghiului PCD este raza sferei date.

Fig. 111

257. a) Centrul S al sferei circumscrise tetraedrului $OABC$ (fig. 112) se află pe perpendiculara pe planul OAB, care trece prin mijlocul D al ipotenuzei AB a triunghiului dreptunghic OAB, şi pe perpendiculara pe planul OCA, care trece prin mijlocul E al ipotenuzei AC a triunghiului dreptunghic OAC. De aceea $SD \parallel CO$ şi $SE \parallel OB$. Prin urmare, se poate duce cîte un plan prin punctele

S, D, O, C şi prin punctele S, E, O, B. Aceste plane vor intersecta $\triangle ABC$ după medianele CD şi respectiv BE, adică dreapta OS trece prin punctul T, centrul de greutate al triunghiului ABC.

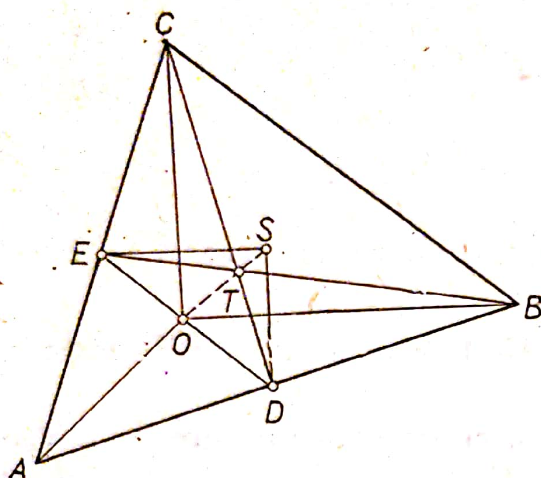


Fig. 112

b) Aplicînd teorema sinusurilor triunghiului ABC, se obţine

$$\frac{BC}{\sin\alpha}=\frac{AC}{\sin\beta}=\frac{AB}{\sin\gamma}$$

sau

$$\frac{BC^2}{\sin^2\alpha}=\frac{AC^2}{\sin^2\beta}=\frac{AB^2}{\sin^2\gamma}=k,$$

iar din triunghiurile dreptunghice OBC, OAC şi OAB se deduc relaţiile

$$BC^2=b^2+c^2,\ AC^2=a^2+c^2,\ AB^2=a^2+b^2.$$

Astfel

$$\frac{b^2+c^2}{\sin^2\alpha}=\frac{a^2+c^2}{\sin^2\beta}=\frac{a^2+b^2}{\sin^2\gamma}=k,$$

ceea ce implică, folosind proporţii derivate, se obţine

$$\frac{a^2}{b^2}=\frac{\sin^2\beta+\sin^2\gamma-\sin^2\alpha}{\sin^2\gamma+\sin^2\alpha-\sin^2\beta}=\frac{\sin(\beta-\alpha)+\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)}=$$

$$=\frac{\sin\beta\cos\alpha}{\sin\alpha\cos\beta}=\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{ctg}\beta}.$$

În mod analog se obţin celelalte două rapoarte deci, a^2, b^2, c^2 sînt proporţionale cu $\operatorname{ctg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\beta$ şi $\operatorname{ctg}\gamma$.

258. Fie R raza sferei. În acest caz

$$a(1+\sqrt{3})=R+\sqrt{R^2-(a\sqrt{2})^2},\ \text{deci}\ R=a\sqrt{3}\ \text{(fig. 113)}.$$

Fie K, L, M, N punctele de intersecție ale muchiilor laterale cu sfera. Triunghiul KOA este isoscel, $OE \perp AA_1$, $AE = \frac{1}{2} KA = OO_1 = = \sqrt{R^2 - (a\sqrt{2})^2} = \sqrt{3a^2 - 2a^2} = a$. Prin urmare, $KA = LB = MC = ND = 2a$. Figura curbilinie $ABLK$ poate fi descompusă în pătratul $ABLK$ și segmentul circular KL a cărui rază este $a\sqrt{2}$ Aria celor patru segmente de cerc este egală cu aria a patru sectoare egale cu un sfert de cerc, din care se scade aria pătratelor corespunzătoare, adică aria căutată este

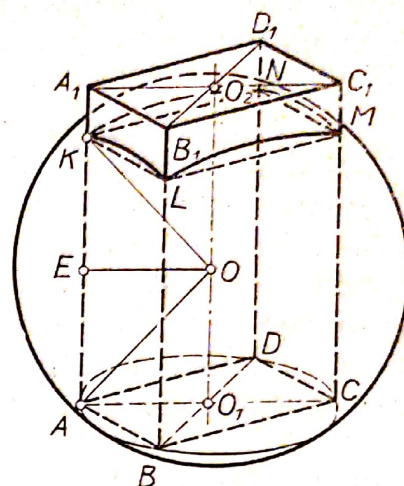


Fig. 113

$$S = 4(2a)^2 + [\pi(a\sqrt{2})^2 - (2a)^2] = 2a^2(6+\pi).$$

259. Se știe că mediatoarea unui segment este locul geometric al punctelor din plan egal depărtate de extremitățile A și B ale segmentului. Cele două semiplane determinate de această mediatoare se notează cu π_L^A și π_L^B. Semiplanul π_L^A în care se află punctul A este mulțimea tuturor punctelor din plan care nu sînt mai îndepărtate de punctul A decît punctul B. Mediatoarea aparține acestui semiplan.

Se va descrie, în continuare, cum înțeleptul, pășind de-a lungul unei drepte date, poate alege o bandă de lățime 1 m, perpendiculară pe această dreaptă, în care se găsește obiectul. Se presupune că el a făcut primul pas de-a lungul dreptei.

1. Dacă i se spune „apropie-te , el continuă să pășească în aceeași direcție pînă cînd, la cel de al $i + 1$-lea pas i se spune „nu te apropia". În acel moment el face un pas înapoi în punctul* A_i. Aceasta înseamnă că obiectul se găsește în banda formată de intersecția semiplanului $\pi_{L_i}^{A_i}$ cu semiplanul $\pi_{L_{i+1}}^{A_i}$. Lățimea acesteia este 1 m.

2. Dacă i se dă indicația „nu te apropia", el se întoarce , pășind în direcția opusă, din nou pînă la momentul cînd i se spune „nu te apropia". Procedează apoi ca în cazul 1.

Algoritmul acțiunii înțeleptului va fi descris complet în continuare.

---

* A_i este poziția înțeleptului după al i-lea pas, iar L_i este mijlocul segmentului $A_{i-1} A_i$.

De fiecare dată cînd face un pas, incluzînd și momentul inițial, înțeleptul privește în jur. În momentul în care vede obiectul, desfășurarea algoritmului se întrerupe.

În momentul inițial înțeleptul alege o dreaptă arbitrară și determină ca mai sus o bandă perpendiculară pe aceasta, în care se găsește obiectul.

Astfel, înțeleptul ajunge în banda de lățime 1 m, găsindu-se în punctul A_i în mijlocul acesteia. În acest punct el își schimbă direcția de mers cu 90° și, repetînd același algoritm pentru dreapta perpendiculară pe cea inițială, găsește obiectul. Fiindcă obiectul se află în pătratul cu latura de 1 m, format de intersecția a două benzi perpendiculare cu lățimea de 1 m, ultimul pas îl aduce pe înțelept în punctul A_{i+j}, centrul pătratului indicat, din care obiectul poate fi văzut, deoarece distanța de la punctul A_{i+j} pînă la orice punct al pătratului nu depășește $\frac{\sqrt{2}}{2}$, deci este mai mică decît unu. Se observă că, ajungînd în punctul A_{i+j}, înțeleptul nu trebuie să mai facă încă doi pași, unul pînă în punctul A_{i+j+1}, unde i s-ar spune să nu se apropie, iar celălalt înapoi. Se calculează în continuare numărul de pași necesari pentru a găsi obiectul.

Fie k pași distanța după care se face schimbarea direcției și l pași restul pînă la găsirea obiectului. Astfel înțeleptul nu face mai mult de $k + l + 6$ pași. Dacă φ este unghiul între direcția inițială de deplasare și direcția spre obiect, la începutul acțiunii,

$$d|\cos \varphi| \geqslant k - \frac{1}{2}, \qquad d|\sin \varphi| \geqslant l - \frac{1}{2}.$$

Adunînd aceste inegalități, se găsește

$$d(|\sin \varphi| + |\cos \varphi|) \geqslant k + l - 1,$$

însă

$$d(|\sin \varphi| + |\cos \varphi|) \leqslant d\sqrt{2}.$$

Rezultă că numărul de pași satisface inegalitățile

$$n \leqslant k + l + 6 = (k + l - 1) + 7 \leqslant d\sqrt{2} + 7 < \frac{3}{2}d + 7.$$

260. Se notează $AB = d$, $BN = x$, $NG = z$, $OM = R$ (fig. 114). Se duce perpendiculara OC din O pe AB şi se notează $BC = b$, $CO = h$. Presupunînd problema rezolvată, se deduce că

$$\begin{cases} x^2 + dx = z^2 + 2Rz, \\ (x - b)^2 + h^2 = (R + z)^2, \end{cases}$$

deci

$$(x - b)^2 + h^2 = R^2 + x^2 + dx.$$

Rezolvînd această ecuaţie, se obţine $x = \dfrac{b^2 + h^2 - R^2}{d + 2b}$. Reiese că punctul N este acelaşi pentru q diferiţi şi poate fi construit.

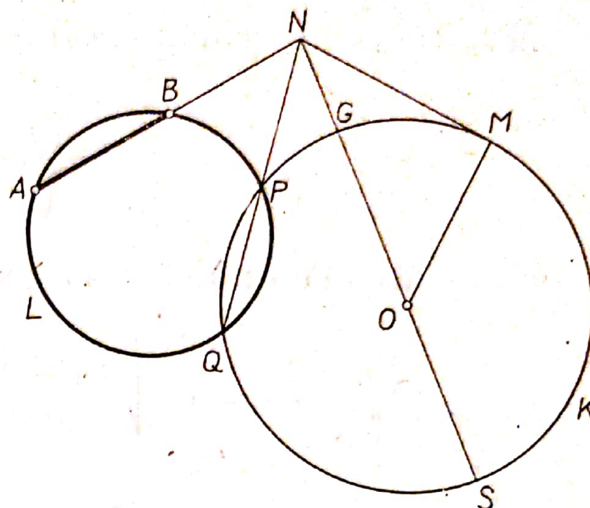


Fig. 114

C o n s t r u c ţ i e. În cercul K se duce o coardă oarecare de lungime q. Se construieşte cercul de centru O tangent la aceasta, iar din N se duc tangentele la acest cerc (acestea pot fi construite).

261. Fie x dat în sistemul de bază 10 prin

$$x = u \cdot 10^2 + v \cdot 10 + w, \qquad u \neq 0,$$

iar în sistemul avînd baza z aceleaşi cifre descriu numărul $y = uz^2 + vz + w$. Deoarece $2x = y$, se obţine

$$u(200 - z^2) + v(20 - z) + w = 0, \qquad 0 \leqslant u, v, w \leqslant 9.$$

Se observă uşor că pentru $z \leqslant 14$ membrul întîi este pozitiv, deci $z \geqslant 15$, însă atunci $200 - z^2 \leqslant 0$ şi în consecinţă $v(20 - z) + w \geqslant 0$.

Cînd $z = 15$, se găseşte că $-25u + 5v + w = 0$.

a) $u = 1$, $v = 4$, $w = 5$.
$u = 1$, $v = 5$, $w = 0$.
$u = 1$, $v \leqslant 3$, nu convine, fiindcă $w \leqslant 9$.
$u = 1$, $v \geqslant 6$, nu convine, deoarece $w \geqslant 0$.

b) $u = 2$, $v = 9$, $w = 5$.
$u = 2$, $v < 9$, nu convine.
$u = 2$, $v < 9$, nu convine.
$u \geqslant 3$, nu convine.

Cînd $z = 16$, se constată că $-56u + 4v + w=0$, ceea ce nu convine, fiindcă dacă $v = w = 9$, se găsește $4v + w = 45 < 56$.

Răspuns. 145, 150, 295.

262. Inegalitatea dată este echivalentă cu următoarea:

$$\frac{\sqrt[n+1]{n+1}}{\sqrt[n]{n}} \leqslant 1. \qquad (1)$$

Membrul întîi al inegalității (1) se scrie succesiv:

$$\frac{\sqrt[n+1]{n+1}}{\sqrt[n]{n}} = \sqrt[n(n+1)]{\frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}} = \sqrt[n(n+1)]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n}} \qquad (2)$$

Se demonstrează* că $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < n$. Dezvoltînd conform binomului lui Newton, se obține

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{1 \cdot n}{n} + \frac{n(n-1)}{2\,!} \cdot 1 \cdot \frac{1}{n^2} + \\ + \frac{n(n-1)(n-2)}{3\,!} \cdot 1 \cdot \frac{1}{n^3} + \ldots + \frac{1}{n^n}.$$

Avînd în vedere că suma $\frac{n(n-1)}{2\,!n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3\,!n^3}$ se poate majora de unu, iar ceilalți termeni din dezvoltare sînt de asemenea majorați de unu, se obține $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < n$ pentru $n \geqslant 3$ și, prin urmare, $\frac{\sqrt[n+1]{n+1}}{\sqrt[n]{n}} = \sqrt[n(n+1)]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n}} < \sqrt[n(n+1)]{\frac{n}{n}} = 1.$

263. Fie ΔABN (fig. 115) dreptunghic în N. Segmentul AB este dat. Punctul N aparține astfel sferei construite pe AB ca diametru. Pe de altă parte, N aparține sferei cu același centru și rază r ca și

---

* Se poate demonstra inegalitatea mai tare $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$.

cercul K. Într-adevăr, cercul de diametru AM, al cărui plan este perpendicular pe planul cercului K, este situat pe această sferă, iar N este un punct al său. Astfel, punctul N este situat pe cercul γ de intersecție a celor două sfere. Se demonstrează ușor că reciproc, orice punct al cercului γ aparține locului geometric căutat.

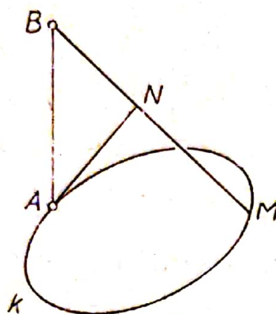


Fig. 115

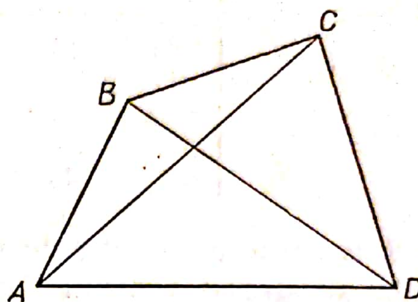


Fig. 116

264. Se reduce la absurd, presupunîndu-se că (fig. 116)

$$AB \geqslant AC. \tag{1}$$

În acest caz $\sphericalangle BCA \geqslant \sphericalangle ABC$, deoarece în $\triangle ABC$ laturii mai mari i se opune unghiul mai mare. Însă $\sphericalangle BCD > \sphericalangle BCA \geqslant \sphericalangle ABC > \sphericalangle DBC$, deoarece patrulaterul $ABCD$ este convex iar unghiul DBC este o parte a unghiului ABC. S-a stabilit astfel că în $\triangle BCD$, $\sphericalangle BCD > \sphericalangle DBC$ și deci

$$BD > CD. \tag{2}$$

Adunînd inegalitățile (1) și (2), se obține că $AB + BD > AC + CD$, ceea ce contrazice inegalitatea dată $AB + BD \leqslant AC + CD$, de aceea $AB < AC$.

265. După cum se constată ușor, $\operatorname{ctg} 4\dfrac{(2k-1)\pi}{8} = 0$ $(k = 1, 2, 3, 4)$. Se notează $\operatorname{tg}\dfrac{(2k-1)\pi}{8} = \alpha_k$. Deoarece $|\alpha_k| \neq 1$,

$$\operatorname{tg}\frac{(2k-1)\pi}{4} = \frac{2\alpha_k}{1-\alpha_k^2} \text{ și } \operatorname{ctg}\frac{(2k-1)\pi}{2} = \frac{1-\left(\dfrac{2\alpha_k}{1-\alpha_k^2}\right)^2}{2\dfrac{2\alpha_k}{1-\alpha_k^2}}, \text{ adică}$$

$1 - \dfrac{4\alpha_k^2}{1-2\alpha_k^2+\alpha_k^4} = 0$, rezultînd astfel $\alpha_k^4 - 6\alpha_k^2 + 1 = 0$, ceea ce se cerea demonstrat.

266. Sistemul dat se înlocuieşte cu sistemul echivalent:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \ldots + nx_n = 0, \\ 2x_1 - x_2 = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ kx_1 - x_k = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ nx_1 - x_n = 0, \qquad\qquad k \geqslant 2. \end{cases}$$

Cea de a k-a ecuaţie se obţine din cea de a k-a ecuaţie a sistemului iniţial prin scăderea primei ecuaţii înmulţite cu k. Astfel $x_k = kx_1$ ($k = 2, 3, \ldots, n$). Înlocuind în prima ecuaţie aceste valori ale lui x_k, se obţine

$$x_1(2 + 2^2 + \ldots + k^2 + \ldots + n^2) = 0.$$

Rezultă $x_1 = 0$ şi, în consecinţă, $x_2 = x_3 = \ldots = x_n = 0$, deci sistemul dat nu admite decît soluţia banală.

267. Fie $x^2 - 2x \sin y + 1 \neq 0$, deci membrul întîi al inegalităţii are sens. Prin transformări succesive ale acestuia se obţine

$$\left(\frac{x^2 \sin y - 2x + \sin y}{x^2 - 2x \sin y + 1}\right)^2 - 1 =$$

$$= \left(\frac{x^2 \sin y - 2x + \sin y}{x^2 - 2x \sin y + 1} - 1\right)\left(\frac{x^2 \sin y - 2x + \sin y}{x^2 - 2x \sin y + 1} + 1\right) =$$

$$= \frac{(\sin y - 1)(x^2 + 2x + 1)}{x^2 - 2x \sin y + 1} \cdot \frac{(\sin y + 1)(x^2 - 2x + 1)}{x^2 - 2x \sin y + 1} =$$

$$= \frac{(\sin^2 y - 1)(x + 1)^2 (x - 1)^2}{(x^2 - 2x \sin y + 1)^2}$$

Expresia obţinută nu este pozitivă pentru nici o valoare a lui x şi y pentru care are sens, deoarece $\sin^2 y - 1 \leqslant 0$, deci

$$\left(\frac{x^2 \sin y - 2x + \sin y}{x^2 - 2x \sin y + 1}\right)^2 - 1 \leqslant 0$$

sau

$$\left(\frac{x^2 \sin y - 2x + \sin y}{x^2 - 2x \sin y + 1}\right)^2 \leqslant 1.$$

268. Ecuaţia dată este echivalentă cu următoarea:

$$|x^2 - 9| - 2\,|x^2 - 1| + |x| + x + 7 = 0. \qquad (1)$$

Membrul întîi al ecuaţiei [notat cu $f(x)$] este reprezentat prin diferite expresii algebrice pe intervalele

$$(-\infty, -3),\ (-3, -1),\ (-1, 0),\ (0, 1),\ (1, 3),\ (3, +\infty),$$

după cum se arată în tabloul:

x	$(-\infty, -3)$	$(-3, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, 3)$	$(3, +\infty)$
(x)	$-x^2$	$-3x^2 + 18$	$x^2 + 14$	$x^2 + 2x + 14$	$-3x^2 + 2x + 18$	$-x^2 + 2x$

Se observă că în punctele care separă două intervale f are aceleaşi valori. Pe intervalele $(-\infty, -3)$, $(3, +\infty)$, $f(x) < 0$, iar pe intervalele $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $f(x) > 0$. În extremităţile intervalelor $(-3, -1)$ şi $(1, 3)$, $f(x)$ ia valori de semne contrarii.

Polinomul de gradul al doilea $-3x^2 + 18$ care reprezintă pe $f(x)$ pe intervalul $(-3, -1)$ are rădăcinile $x_{1,2} = \pm\sqrt{6}$. Rădăcina $x = -\sqrt{6}$ se află în acest interval şi de aceea este rădăcină a ecuaţiei (1). Rădăcina $x = \sqrt{6}$ nu este situată pe intervalul $(-3, -1)$ şi de aceea se îndepărtează.

Polinomul de gradul al doilea $-3x^2 + 2x + 18$ care reprezintă pe $f(x)$ pe intervalul $(1, 3)$ are rădăcinile $x_{3,4} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{55}}{3}$. Rădăcina $x_3 = \dfrac{-1 + \sqrt{55}}{3}$ se află în intervalul $(1, 3)$, fiind deci rădăcină a ecuaţiei (1). Rădăcina $x_4 = \dfrac{-1 - \sqrt{55}}{3}$ nu se află în intervalul $(1, 3)$ şi de aceea va fi îndepărtată.

Răspuns. $x = -\sqrt{6}$ şi $x = \dfrac{-1 + \sqrt{55}}{3}$ sînt rădăcinile ecuaţiei date.

269. Fie x numărul pescarilor din prima echipă, y numărul celor din a doua şi z numărul celor din a treia. Din enunţ rezultă că

$$13x + 5y + 4z = 113, \qquad (1)$$

$$x + y + z = 16. \qquad (2)$$

S-a obţinut în acest mod un sistem de două ecuaţii cu trei necunoscute. Condiţiile problemei impun ca soluţiile acestui sistem să fie formate din numere întregi pozitive x, y, z. Vom demonstra că avînd în vedere această condiţie, sistemul are soluţie unică. Se scade ecuaţia (2) înmulţită cu 4 din prima, găsindu-se

$$9x + y = 49 \qquad (1')$$

sau

$$9x = 49 - y. \qquad (3)$$

Fiindcă x şi z sînt numere pozitive, $y = 16 - x - z < 16$. Membrul al doilea al egalităţii (3) este deci număr întreg, divizibil cu 9, cuprins între 33 şi 49, ceea ce înseamnă fie că $9x = 36$, fie $9x = 45$. În primul caz $x = 4$; din (3) rezultă $y = 13$ şi din (2) rezultă $z = -1$, ceea ce contrazice faptul că z este pozitiv. În cel de-al doilea caz $x = 5$, din (3) rezultă $y = 4$ şi din (2) rezultă că $z = 7$.

Răspuns. $x = 5$, $y = 4$, $z = 7$.

270. a) Fiind situat pe axa radicală a cercurilor c_1 şi c_2 (fig. 117), punctul C are aceeaşi putere faţă de cele două cercuri. În consecinţă $\frac{CQ}{CP} = \frac{CN}{CM}$. În acelaşi timp, $\sphericalangle QCP$ este comun triunghiurilor CPQ şi CMN, deci acestea sînt asemenea, ceea ce înseamnă că $\sphericalangle CQP = \sphericalangle CNM$, adică patrulaterul $MNPQ$ este inscriptibil.

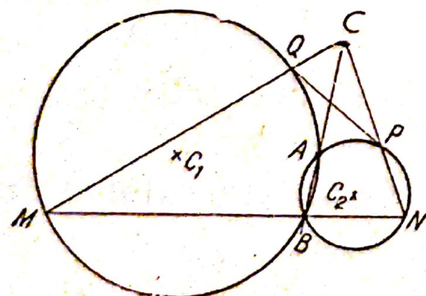


Fig. 117

b) Deoarece patrulaterul $APNB$ este inscriptibil, $\sphericalangle CAP = \sphericalangle CNB$, iar fiindcă patrulaterul $MNPQ$ este inscriptibil, rezultă $\sphericalangle CQP = \sphericalangle CNB$. Rezultă astfel că $\sphericalangle CQP = \sphericalangle CAP$, deci patrulaterul $CQAP$ este inscriptibil, iar CA este însă o coardă fixă în acest patrulater. Perpendicularele pe mijlocul coardelor variabile AP şi AQ trec prin centrul cercului circumscris acestui patrulater ca şi perpendiculara în mijlocul coardei fixe AC. Locul geometric cerut va fi

deci o submulțime de puncte a mediatoarei segmentului CA. Se consideră cazul limită cînd P și N coincid (adică CN este tangentă) și CQ devine CB. Atunci punctul extrem al locului se va găsi la intersecția tangentei duse din C la cercul C_2 cu mediatoarea CA. Analog, pentru tangenta dusă din C la cercul C_1. Locul geometric va fi deci porțiunea mediatoarei segmentului CA cuprinsă între tangentele (exterioare) duse din C la cele două cercuri.

c) Cînd MN variază, unghiurile M, respectiv N au mărimea constantă iar AB este o oblică dusă din A pe MN, deci $AB \geqslant h$, h fiind înălțimea din A pe MN. Cazul triunghiului „cel mai mare" (adică cercul circumscris acestuia are raza maximă) este realizat cînd $MN \perp AB$.

271. Fie x_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ rădăcinile polinomului $P(x)$. Din enunț rezultă că $|x_1| = |x_2| = \ldots = |x_n| = r$. Deoarece $x_1 x_2 \ldots x_n = (-1)^{2n} = 1$, înseamnă că $|x_1||x_2| \ldots |x_n| = 1$, $r^n = 1$ și deci $r = 1$. Rădăcinile x_k vor avea forma $x_k = \cos \alpha_k + i \sin \alpha_k$.

Ținînd seama de forma rădăcinilor, $x_1 x_2 \ldots x_n = \prod_{k=1}^{n} (\cos \alpha_k + i \sin \alpha_k) = \cos \sum_{k=1}^{n} \alpha_k + i \sin \sum_{k=1}^{n} \alpha_k$ și fiindcă $x_1 x_2 \ldots x_n = 1$, se deduce că $\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{2} = \pi m$. Pe de altă parte,

$$P(-1) = \prod_{k=1}^{n} (-1 - x_k) = (-1)^{n2^n} \prod_{k=1}^{n} \cos \frac{\alpha_k}{2} \cdot \prod_{k=1}^{n} \left(\cos \frac{\alpha_k}{2} + i \sin \frac{\alpha_k}{2} \right) =$$

$$= (-1)^{n2^n} \prod_{k=1}^{n} \cos \frac{\alpha_k}{2} \prod_{k=1}^{n} \left(\cos \frac{\alpha_k}{2} + i \sin \frac{\alpha_k}{2} \right) =$$

$$= (-1)^{n2^n} \prod_{k=1}^{n} \cos \frac{\alpha_k}{2} = (\cos m\pi + i \sin m\pi) \in R, \text{ fiindcă } \sin m\pi = 0.$$

272. Se arată mai întîi că $\sum_{i=1}^{n} x_i = na$. Din prima relație dată rezultă

$$\begin{aligned} a + ax_1 &\geqslant ax_2 + x_2, \\ a + ax_2 &\geqslant ax_3 + x_3, \\ a + ax_3 &\geqslant ax_4 + x_4, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a + ax_{n-1} &\geqslant ax_n + x_n, \\ a + ax_n &\geqslant ax_1 + x_1. \end{aligned}$$

Adunînd inegalitățile membru cu membru, se obține

$$na + a\sum_{i=1}^{n} x_i \geqslant a\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Efectuînd reducerile, se obține

$$na \geqslant \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Din ipoteză însă $na \leqslant \sum_{i=1}^{n} x_i$, ceea ce arată că $na = \sum_{i=1}^{n} x_i$. În aceste condiții fiecare inegalitate nestrictă din șir este o egalitate, deoarece existența unei inegalități stricte ar contrazice egalitatea sumelor. Deci $a + ax_{k-1} = ax_k + x_k$ sau

$$x_k = \frac{a + ax_{k-1}}{a+1}. \tag{1}$$

Rezultă că $x_2 = \frac{a}{a+1} + \frac{a}{a+1}x_1$. Notînd $\frac{a}{a+1} = \alpha$, se obține, prin inducție:

$$x_2 = \alpha + \alpha x_1,$$
$$x_3 = \alpha + \alpha^2 + \alpha^2 x_1,$$
$$x_4 = \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^3 x_1,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$x_n = \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \ldots + \alpha^{n-1} + \alpha^{n-1} x_1,$$
$$x_1 = \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \ldots + \alpha^n + \alpha^n x_1.$$

Ultima egalitate devine $x_1(1 - \alpha^n) = \alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^n$ sau

$$x_1(1-\alpha)(1 + \alpha + \ldots + \alpha^{n-1}) = \alpha(1 + \alpha + \ldots + \alpha^{n-2}).$$

Deci

$$x_1 = \frac{\alpha}{1-\alpha} \text{ sau } x_1 = a,\ x_2 = \frac{a}{a+1} + \frac{a^2}{a+1} = a.$$

Se presupune $x_{k-1} = a$. Din relația $x_k = \frac{a + ax_{k-1}}{a+1}$ rezultă că $x_k = \frac{a + a^2}{a+1} = a$.

273. Membrul întîi f al ecuației reprezintă o sumă de funcții crescătoare, iar membrul al doilea al ecuației reprezintă o sumă de funcții descrescătoare, deci $f(x) \neq g(x)$ pentru orice $x \neq x_0$ pentru care cele două funcții au sens.

274. a) Segmentele AP și AQ (fig. 118) sînt simetricele lui AM față de AB și respectiv AC și deci

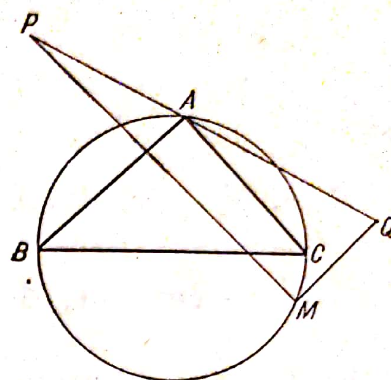


Fig. 118

$$\sphericalangle PAB = \sphericalangle BAM \text{ și } \sphericalangle QAC = \sphericalangle CAM,$$

rezultînd

$$\sphericalangle MAP = 2\sphericalangle BAM, \quad \sphericalangle MAQ = 2\sphericalangle CAM,$$

adică

$$\sphericalangle MAP + \sphericalangle MAQ = 2(\sphericalangle BAM + \sphericalangle CAM) = 2\sphericalangle BAC = 180°$$

și deci punctele P, A, Q, sînt coliniare.

b) Segmentele AP și AQ fiind simetricele segmentului AM, rezultă că $AP = AQ = AM$ și deci $PQ = 2AM$.

Pentru ca PQ să fie maxim este necesar ca AM să fie maxim, adică punctul M să fie diametral opus lui A. În acest caz $PQ = 4R$.

c) Pentru ca dreapta AQ să fie tangentă la cercul ABC este necesar și suficient ca $\sphericalangle QAC = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2}$. Datorită faptului că $\sphericalangle QAC = \sphericalangle CAM = \frac{\overset{\frown}{MC}}{2}$, AQ este tangentă dacă și numai dacă $AC = MC$, adică dacă și numai dacă punctul M este simetricul lui A față de BC.

d) Triunghiul PMQ este dreptunghic în M deoarece mediana AM este jumătate din latura opusă. Centrul cercului PMQ este A iar raza este AM. Pentru ca punctul B să se găsească pe acest cerc este necesar și suficient că $AB = AM$.

Patrulaterul $BMQP$ este inscriptibil dacă și numai dacă $AB = AM$.

275. a) Condiția $\Delta \geqslant 0$ este echivalentă cu $m \in [-2-\sqrt{2}, 2-\sqrt{2}]$.

$$S_1 = x_1 + x_2 = -m, \text{ deci } S_1 \in [-2+\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}].$$

$$P = x_1x_2 = \frac{(m+1)^2}{2}.$$

Minimul funcţiei $P(m) = \frac{(m+1)^2}{2}$, $P : [-2-\sqrt{2}, 2-\sqrt{2}]$ se realizează cînd $m = -1$, iar maximul în una din extremităţile domeniului de definiţie ($m = -2 - \sqrt{2}$), deci

$$P = x_1 x_2 \in \left[0, \frac{3+2\sqrt{2}}{2}\right],$$

$$S_2 = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = m^2 - m^2 - 2m - 1 =$$

$$= -2m - 1, \text{ deci } S_2 \in [3 - 2\sqrt{2}, 3 + 2\sqrt{2}].$$

b) Dacă se elimină m între relaţiile dintre rădăcini şi coeficienţi, se găseşte că $x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 - 2x_2 + 1 = 0$, sau $(x_1-1)^2+(x_2-1)^2= = 1$, deci $(x_1 - 1)^2 \leqslant 1$ şi $(x_2 - 1)^2 \leqslant 1$, obţinînd $x_i \in [0, 2]$ ($i=1, 2$); $x_1 = 0$ dacă $m = 1$ şi $x_2 = 2$ dacă $m = -3$. Deci $\max(x_1, x_2) = 2$, iar $\min(x_1, x_2) = 0$.

c) Rezolvarea acestui punct nu prezintă dificultăţi.

d) Se notează $a = 3 + \sqrt{5}$, $b = 3 - \sqrt{5}$ şi se găseşte $a + b = 6$, $ab = 4$, $E_1 = a + b = 6$.

Proprietatea cerută se demonstrează prin inducţie completă. Pentru $n = 1$, $E_1 = 6$, deci proprietatea este îndeplinită.

Presupunînd că 2^k este divizor al lui E_k ($k < n$), se va arăta că 2^n divide pe E_n.

$$E_n = a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} + b^{n-1}) - ab(a^{n-2} + b^{n-2}) =$$

$$= 6(a^{n-1} + b^{n-1}) - 4(a^{n-2} + b^{n-2}).$$

Faptul că 2^{n-1} este divizor al lui $a^{n-1} + b^{n-1}$ înseamnă că 2^n este divizor al lui $(a + b)(a^{n-1}+b^{n-1})$. Analog, din faptul că $a^{n-2}+b^{n-2}$ se divide cu 2^{n-2} reiese că $ab(a^{n-2} + b^{n-2})$ se divide cu 2^n, deci 2^n este divizor al lui E_n.

Dacă n este impar, se dezvoltă după binomul lui Newton şi toţi termenii care conţin radicali dispar. Termenii rămaşi sînt toţi multipli de 3.

276. Fie $N = \sum_{i=1}^{n} x_i$ şi S suma din membrul întîi al inegalităţii ce se cere demonstrată. Fie suma $(x_1 - x_2) + (x_2 - x_3) + \dots$ $\dots + (x_{n-1} - x_n) + (x_n - x_1) = 0$.

Această sumă se adună la S astfel:

$$S = \frac{(x_3 + x_4 + \ldots + x_n)(x_1 - x_2)}{x_1 + x_2} + (x_1 - x_2) +$$

$$+ \frac{(x_1 + x_4 + \ldots + x_n)(x_2 - x_3)}{x_2 + x_3} + (x_2 - x_3) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-2})(x_{n-1} - x_n)}{x_{n-1} + x_n} + (x_{n-1} - x_n) +$$

$$+ \frac{(x_2 + x_3 + \ldots + x_{n-1})(x_n - x_1)}{x_n + x_1} + (x_n - x_1) =$$

$$= \frac{N(x_1 - x_2)}{x_1 + x_2} + \frac{N(x_2 - x_3)}{x_2 + x_3} + \ldots + \frac{N(x_{n-1} - x_n)}{x_{n-1} + x_n} +$$

$$+ \frac{N(x_n - x_1)}{x_n + x_1} = N\left(\frac{x_1 - x_2}{x_1 + x_2} + \frac{x_2 - x_3}{x_2 + x_3} + \ldots\right.$$

$$\left.\ldots + \frac{x_{n-1} - x_n}{x_{n-1} + x_n} + \frac{x_n - x_1}{x_n + x_1}\right).$$

Evident că $N > 0$. Se va demonstra prin inducție că

$$S_n = \frac{x_1 - x_2}{x_1 + x_2} + \frac{x_2 - x_3}{x_2 + x_3} + \ldots + \frac{x_{n-1} - x_n}{x_{n-1} + x_n} + \frac{x_n - x_1}{x_n + x_1} \geqslant 0.$$

Proprietatea este evidentă pentru $n = 2$. Se presupune $S'_n \geqslant 0$. Atunci

$$S'_{n+1} = S'_n - \frac{x_n - x_1}{x_n + x_1} + \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n + x_{n-1}} + \frac{x_{n+1} - x_1}{x_{n+1} + x_1} =$$

$$= S'_n + \frac{(x_1 - x_n)(x_1 - x_{n+1})(x_n - x_{n-1})}{(x_1 + x_n)(x_1 + x_{n+1})(x_n + x_{n-1})}$$

Fiindcă $x_1 \geqslant x_n > 0$, $x_1 \geqslant x_{n+1} > 0$ și $x_n \geqslant x_{n+1}$, rezultă că $S_{n+1} \geqslant 0$, inegalitatea fiind astfel demonstrată.

277. $\sum_{k=1}^{2m+1} (a_k - k) = 0$. Aceasta înseamnă că cel puțin unul dintre aceste numere este par, deoarece în caz contrar suma unui număr impar de numere impare ar fi impară, ceea ce încheie demonstrația.

278. Fie $y = \sqrt{2} + \sqrt{3}$. În acest caz $3 = (y - \sqrt{2})^2 = y^2 - 2\sqrt{2}y + 2$. În continuare, $(y^2 - 1)^2 = 8y^2$, $y^4 - 10y^2 + 1 = 0$. Aceasta înseamnă că polinomul $P_1(x) = x^4 - 10x^2 + 1$ se anulează pentru $x = y = \sqrt{2} + \sqrt{3}$. În mod analog se construiește polinomul avînd ca rădăcină pe $z = \sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$; $3 = (z - \sqrt{2})^3 = z^3 - 3\sqrt{2}z^2 + 6z - 2\sqrt{2}$, $(z^3 - 6z - 3)^2 = (3z^2 + 2)^2 \cdot 2$, obținîndu-se polinomul

$$P_2(x) = x^6 - 6x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 36x + 1.$$

Polinomul căutat se poate obține înmulțind polinoamele $P_1(x)$ și $P_2(x)$. Acesta se va anula pentru valorile care anulează factorii săi, deci va fi polinomul căutat.

Răspuns. $P(x) = x^{10} - 16x^8 + 6x^7 + 73x^6 + 24x^5 - 125x^4 +$
$+ 354\, x^3 + 2x^2 - 36x + 1.$

Se poate demonstra că $P(x)$ are gradul cel mai mic dintre toate polinoamele care satisfac condiția pusă. Un astfel de polinom cu coeficienți întregi va admite ca rădăcini, pe lîngă cele două impuse și conjugatele lor, adică $\pm \sqrt{2} \pm \sqrt{3}$ și $\pm \sqrt{2} + \varepsilon \sqrt[3]{3}$, ε fiind o rădăcină cubică oarecare a unității. Aceste numere sînt în total $2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 10$, fiind distincte între ele. Din această cauză gradul polinomului cerut nu poate fi mai mic decît 10.

279. Fie șirul $a_n = \frac{(n-1)^2 + n^2}{2}$; $n = 1, 2, \ldots$ și se pune în corespondență fiecărui număr $x \geqslant \frac{1}{2}$ numărul întreg $k(x)$ după următoarea regulă. Dacă $a_n = \frac{(n-1)^2 + n^2}{2} \leqslant x \leqslant \frac{n^2 + (n+1)^2}{2} = a_{n+1}$, se pune $k(x) = n$. Deoarece $a_1 = \frac{1}{2}$, numărul $k(x)$ este definit pentru orice $x \geqslant \frac{1}{2}$.

Cînd $x \geqslant \frac{1}{2}$, expresia de sub radicalul care intervine în inegalitate este pozitivă, iar membrul întîi al inegalității este dat de un modul, fiind deci pozitiv. Ridicînd ambii membri ai inegalității la pătrat, se obține inegalitatea echivalentă $x^2 - 2n^2x + n^4 \leqslant x - \frac{1}{4}$ sau

$$x^2 - (2n^2 + 1)\,x + \left(n^4 + \frac{1}{4}\right) \leqslant 0. \qquad (*)$$

Trebuie arătat faptul că atunci cînd x variază între limitele indicate, polinomul de gradul doi din membrul întîi al inegalității (*) este negativ. Se verifică ușor că rădăcinile $x_{1,2} = n^2 + \frac{1}{2} \pm n$ ale polinomului indicat sînt limitele a_n și a_{n+1} ale intervalului considerat. Întrucît un polinom de gradul al doilea care are coeficientul dominant pozitiv și rădăcini reale ia pe intervalul dintre rădăcini numai valori negative, inegalitatea (*) este adevărată și deci afirmația din enunț este demonstrată.

Faptul că polinomul de gradul al doilea verifică inegalitatea respectivă se putea arăta, dealtfel, direct din inegalitățile $a_n \leqslant x \leqslant \leqslant a_{n+1}$, din care se deduce că

$$(x - a_n)(x - a_{n+1}) \leqslant 0.$$

Înlocuind în această relație valorile lui a_n și a_{n+1}, se obține inegalitatea (*).

280. Egalitatea care se cere demonstrată se scrie sub forma

$$[a,\ b,\ c]^2\,(a,\ b)(b,\ c)(c,\ a) = (a,\ b,\ c)^2\,[a,\ b][b,\ a][c,\ a]. \qquad (1)$$

Ambii membri ai egalității sînt numere întregi pozitive, demonstrația egalității lor reducîndu-se la a demonstra că aceștia se descompun la fel în factori primi. Este clar că factorii primi care intervin sînt factorii primi ai lui a, b, c. Este suficient a se arăta că fiecare din acești factori figurează în ambii membri la aceeași putere. Fie unul dintre aceștia p, intervenind în descompunerea lui a la puterea α, în descompunerea lui b la puterea β și în descompunerea lui c la puterea γ (α, β, γ pot fi nuli). Pe baza simetriei expresiilor considerate față de variabilele a, b, c, se poate considera fără a restrînge generalitatea, că $\alpha \geqslant \beta \geqslant \gamma$. Se observă că în ambii membri ai egali-

tății (1) factorul p intervine la puterea $2\alpha + \beta + 2\gamma$. Deoarece p este un factor prim oarecare, egalitatea (1) este astfel demonstrată.

281. Din enunț rezultă că toate fețele tetraedrului considerat sînt triunghiuri egale între ele. Se notează cu α, β, γ mărimile unghiurilor acestor triunghiuri. Unghiurile plane cu vîrful în vîrfuri ale tetraedrului sînt de asemenea α, β, γ. Din proprietățile unghiurilor plane ale unui triedru se deduce că $\alpha < \beta + \gamma$. Însă $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, deci $\beta + \gamma > 90°$, ceea ce înseamnă că $\alpha < 90°$. În mod analog se demonstrează că $\beta < 90°$ și $\gamma < 90°$.

282. În esență problema este de combinatorică. Este suficient să se calculeze numărul produselor care sînt multipli de 10, dintre toate cele 9^n produse. Este evident că trebuie considerate, în acest scop, toate produsele care au numărul 5 ca factor, iar cel puțin unul din ceilalți factori este par. Se calculează mai ușor numărul elementelor din mulțimea complementară. Numărul produselor care nu conțin pe 5 este 8^n, iar numărul produselor care nu conțin numere pare este 5^n. Printre acestea din urmă se găsesc 4^n produse care nu conțin pe 5 și deci au fost numărate printre acelea. Numărul produselor care sînt multipli de 10 este deci $9^n - (8^n + 5^n - 4^n)$, iar probabilitatea cerută este $1 - \dfrac{8^n + 5^n - 4^n}{9^n}$.

283. Se constată ușor că mulțimea de numere care se cere nu este unic determinată. Se vor face cîteva observații care vor ajuta să se determine unele din aceste mulțimi. Se deduc mai întîi cîteva condiții necesare care trebuie să fie satisfăcute de aceste numere.

Întrucît inegalitatea dată în enunț este adevărată pentru toate numere raționale, se poate trece la limită în mulțimea numerelor raționale, pentru $r \to \sqrt[3]{2}$. Se obține astfel

$$2^{\frac{2}{3}} a + 2^{\frac{1}{3}} b + c = 2d + 2^{\frac{2}{3}} e + 2^{\frac{1}{3}} f.$$

Se poate arăta că această egalitate este îndeplinită numai în cazul cînd $a = e$, $b = f$ și $c = 2d$. În acest mod, este necesar să se determine numerele a, b, c, care satisfac condiția

$$\left| \frac{ar^2 + br + 2d - dr^2\sqrt[3]{2} - ar\sqrt[3]{2} - b\sqrt[3]{2}}{dr^2 + ar + b} \right| < |r - \sqrt[3]{2}|$$

sau

$$\left| \frac{ar + b - \sqrt[3]{2}d(r + \sqrt[3]{2})}{dr^2 + ar + b} \right| < 1.$$

Această inegalitate va fi adevărată, în particular, dacă

$$a > d\sqrt[3]{2} > 0, \quad b > d\sqrt[3]{2^2} > 0.$$

Se obțin în acest mod o serie de mulțimi de numere care constituie rezolvări ale problemei, ca, de exemplu:

1) $a = b = 2$, $d = 1$,

2) $a = b = 3$, $d = 1$ etc.

284. Fie pentagonul $ABCDE$ care satisface condiția problemei (fig. 119). Deoarece $S_{ABE} = S_{ABC} = 1$, rezultă că $S_{ACE} = S_{BEC}$, punctele A și B sînt deci la aceeași distanță față de dreapta CE și, prin urmare, $AB \parallel EC$ (analog se demonstrează că și celelalte diagonale ale pentagonului sînt paralele cu laturile respective), ceea ce înseamnă că patrulaterul $CDEF$ ($F = AC \cap BE$) este paralelogram și aria lui este egală cu 2 (din condiția ca $S_{CDE} = 1$).

Se notează S_{ABF} cu S_1 și $S_{AFE} = S_{BFC}$ cu S_2, $S_1 + S_2 = 1$. Prin urmare,

$$S_{ABCDE} = 2 + 2S_2 + S_1 = 3 + S_2.$$

Se calculează, în continuare, S_2. Comparînd ariile triunghiurilor ABF și AFE și din asemănarea triunghiurilor ABF și CEF rezultă că

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{BE}{EF} = \frac{AF}{FC} = \frac{S_2}{S_1 + S_2}, \qquad \frac{S_1}{S_2} = \frac{S_2}{S_1 + S_2}.$$

Rezolvînd sistemul

$$S_1 + S_2 = 1,$$
$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{S_2}{S_1 + S_2},$$

se obține

$$S_2 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

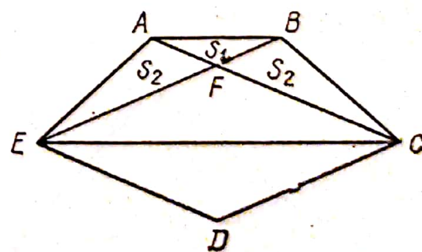


Fig. 119

Astfel,

$$S_{ABCDE} = \frac{5 + \sqrt{5}}{2}.$$

În continuare se va arăta că este posibilă construirea unei infinități de poligoane care verifică condițiile din enunț. Se construiește, de exemplu, poligonul regulat $ABCDE$ care satisface cerințele enunțului, și apoi acesta este supus unei transformări afine, în care vîrfurile se mișcă pe drepte paralele (v. fig. 120). Pentagonul obținut

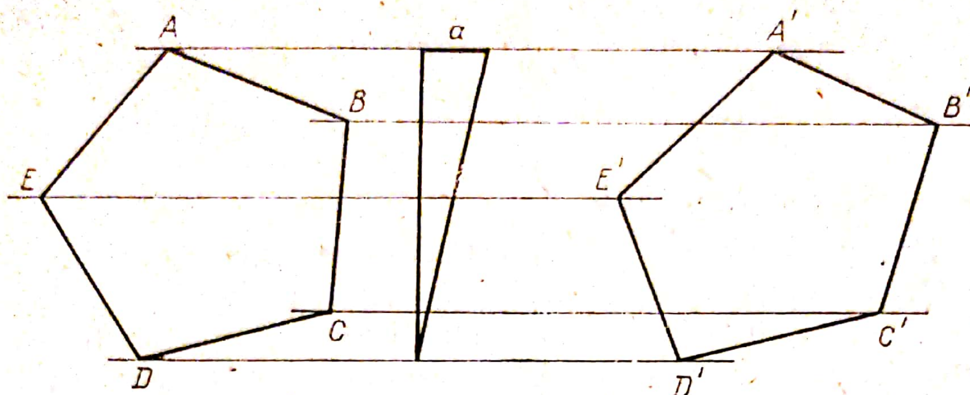


Fig. 120

$A_1B_1C_1D_1E_1$ verifică, de asemenea, condiția din enunț. Fiindcă există o infinitate de astfel de transformări, rezultă că va exista o infinitate de pentagoane care satisfac cerințele problemei.

285. Se notează cu P', respectiv Q' punctele de intersecție ale semidreptelor AP și AQ cu fața BCD (fig. 121). Prin P' și Q' se duce segmentul KL ($K \in BC$, $L \in CD$). Deoarece unghiul $P'AQ'$ este o parte a unghiului KAL, este suficient pentru a rezolva problema să se demonstreze că $\sphericalangle KAL \leqslant 60°$, inegalitate care se stabilește demonstrînd că $AK \geqslant KL$ și $AL \geqslant KL$.

Din triunghiurile KDL și BKL (fig. 122) se obțin: $\sphericalangle KDL < 60° < \sphericalangle KLD$ și $\sphericalangle LBK < 60° < \sphericalangle BKL$, deci $KL \leqslant KD = AK$, $KL \leqslant BL = AL$ (egalitatea se realizează cînd $L = D$ sau $K = B$). Astfel, în ΔKAL, $\sphericalangle KAL \leqslant 60°$. Deoarece $\sphericalangle P'AQ' = \sphericalangle PAQ$ este strict mai mic decît unghiul KAL, înseamnă că $\sphericalangle PAQ < 60°$.

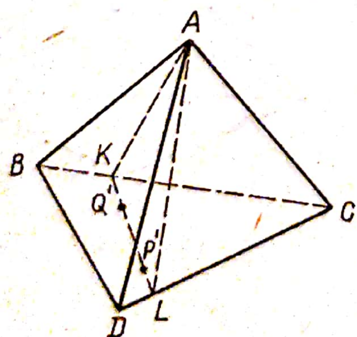


Fig. 121

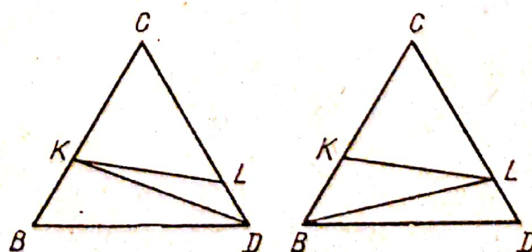


Fig. 122

286. Termenii ambelor şiruri sînt consideraţi modulo 8. Se arată în acest caz uşor, cu ajutorul inducţiei, că primul şir, începînd de la al treilea termen, este periodic (modulo 8):

$$1,\ 1,\ 3,\ 5,\ 3,\ 5,\ 3,\ \ldots \qquad \pmod 8$$

În mod analog se arată periodicitatea celui de-al doilea şir:

$$1,\ 7,\ 1,\ \ldots \qquad \pmod 8$$

Deoarece şirurile iniţiale sînt crescătoare, singurii termeni comuni sînt $x_0 = x_1 = y_0 = 1$.

287. Se consideră cercul circumscris poligonului. Toate diagonalele poligonului sînt coarde ale cercului, nici una dintre acestea nefiind diametru. Se fixează una dintre diagonale drept cea mai mare latură a triunghiurilor cărora nu le aparţine centrul poligonului regulat. Este evident, că cel de-al treilea vîrf al unor astfel de triunghiuri va fi dat de oricare din vîrfurile poligonului situat pe arcul mai mic determinat de această diagonală pe cercul circumscris. Numărul acestor vîrfuri depinde de lungimea diagonalei fiind cuprins între 1 şi $n - 1$. Deoarece numărul diagonalelor de o aceeaşi lungime este $2n + 1$, numărul total al acestor triunghiuri este

$$(2n + 1)(1 + 2 + \ldots + n - 1) = \frac{n(n-1)}{2}(2n + 1).$$

Numărul triunghiurilor ale căror vîrfuri se găsesc printre vîrfurile poligonului dat este dat de formula

$$C_{2n+1}^{3} = \frac{(2n + 1)2n(2n - 1)}{3 \cdot 2}.$$

Probabilitatea căutată este astfel

$$\frac{\dfrac{(2n + 1)\,2n(2n - 1)}{2 \cdot 3} - \dfrac{n(n-1)}{2}(2n + 1)}{\dfrac{(2n + 1)\,2n(2n - 1)}{3 \cdot 2}} = \frac{n + 1}{2(2n - 1)}.$$

288. Numerele căutate x, y, z se pot considera rădăcini ale unei ecuaţii de gradul al treilea

$$t^3 - at^2 + bt - c = 0. \qquad (1)$$

Se determină condițiile care trebuie satisfăcute de coeficienții acestor ecuații. Din formulele lui Viète se obțin:

$$a = x + y + z, \tag{2}$$

(din enunțul problemei $a = 3$),

$$b = xy + yz + zx, \tag{3}$$

$$c = xyz. \tag{4}$$

Ridicînd la pătrat ambii membri ai egalității $x + y + z = 3$, se găsește

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) = 9,$$

rezultînd

$$xy + yz + zx = b = 3, \tag{5}$$

(conform enunțului, $x^2 + y^2 + z^2 = 3$). Deoarece x, y, z sînt rădăcini ale ecuației (1),

$$x^3 - ax^2 + bx - c = 0,$$

$$y^3 - ay^2 + by - c = 0,$$

$$z^3 - az^2 + bz - c = 0.$$

Adunînd relațiile membru cu membru și folosind enunțul problemei și relațiile (2) și (5), se obține

$$x^3 + y^3 + z^3 = 3c. \tag{6}$$

Suma puterilor a patra ale lui x, y, z se determină adunînd egalitățile:

$$x^4 - ax^3 + bx^2 - cx = 0,$$

$$y^4 - ay^3 + by^2 - cy = 0,$$

$$z^4 - az^3 + bz^2 - cz = 0.$$

Folosind (6), (2) și (5), se găsește

$$x^4 + y^4 + z^4 = 12c - 9. \tag{7}$$

În mod analog se calculează sumele puterilor de gradul cinci ale lui x, y, z:

$$x^5 + y^5 + z^5 = 30c - 27.$$

Conform enunțului, această ultimă sumă este egală cu 3, deci $c = 1$. Astfel, x, y, z sînt rădăcini ale ecuației

$$t^3 - 3t^2 + 3t - 1 = 0 \text{ sau } (t-1)^3 = 1.$$

Rădăcinile ecuației în t conduc la rezolvarea sistemului: $x = y = z = 1$.

289. Prin reducere la absurd, se consideră că $\sqrt[3]{p_1}$, $\sqrt[3]{p_2}$ și $\sqrt[3]{p_3}$ sînt termenii unei progresii aritmetice. În acest caz $\sqrt[3]{p_1} = a$, $\sqrt[3]{p_2} = a + mr$, $\sqrt[3]{p_3} = a + nr$, p_i $(i = 1, 2, 3)$ fiind numere prime, iar m și n numere întregi. Eliminînd pe a și r, se găsește că

$$\frac{\sqrt[3]{p_2} - \sqrt[3]{p_1}}{\sqrt[3]{p_3} - \sqrt[3]{p_1}} = \frac{m}{n}$$

$$m\sqrt[3]{p_3} - n\sqrt[3]{p_2} = (m-n)\sqrt[3]{p_1}, \quad (m\sqrt[3]{p_3} - n\sqrt[3]{p_2})^3 = (m-n)^3 p_1,$$

$$m^3 p_3 - n^3 p_2 - (m-n)^3 p_1 = 3mn(m-n) \cdot \sqrt[3]{p_1 p_2 p_3}.$$

Ultima egalitate nu este posibilă deoarece în membrul întîi se află un număr întreg și în membrul al doilea un număr irațional.

290. Se presupune că au loc egalitățile din enunț și se arată că astfel se ajunge la o contradicție. Se folosește faptul că orice polinom cu coeficienți întregi avînd rădăcina întreagă p se poate reprezenta sub forma

$$Q(x) = (x - p)R(x),$$

$R(x)$ fiind un polinom cu coeficienții de asemenea întregi. Polinoamele $P(x) - b$, $P(x) - c$ și $P(x) - a$ se scriu în acest fel:

$$P(x) - b = (x - a)P_1(x),$$

$$P(x) - c = (x - b)P_2(x),$$

$$P(x) - a = (x - c)P_3(x).$$

Fără a restrînge generalitatea, se consideră că cel mai mare modul al diferenței a două din numerele a, b, c este $|a - c|$. În particular

$$|a - b| < |a - c|. \tag{2}$$

Punînd $x = c$ în prima din egalitățile (1) și avînd în vedere că $P(c) = a$, se obține $a - b = (c - a)P_1(c)$. Întrucît $P_1(c)$ este număr întreg, înseamnă că $|a - b| \geqslant |c - a|$, ceea ce contrazice relația (2).

În cazul cînd o altă diferență este cea maximă, pentru a ajunge la contradicție trebuie folosite alte egalități date de (1).

291. Pe baza simetriei în a, b, c a expresiilor care intervin în inegalitate, fără a restrînge generalitatea, se poate considera că $a \geqslant b \geqslant c$. Printr-un șir de transformări echivalente, inegalitatea dată este adusă la forma $a^{a-b}a^{a-c}b^{b-c} \geqslant b^{a-b}c^{a-c}c^{b-c}$ și, deoarece $a \geqslant b \geqslant c$, această inegalitate este adevărată.

292. Prin cele două puncte date, care se notează cu A și B, se duce un cerc mare pe planul căruia se proiectează arcul dat. Este evidentă suficiența condiției ca proiecția arcului să fie conținută în jumătate din discul mărginit de cercul mare construit, ceea ce reduce problema în spațiu din enunț la o problemă plană. Se folosește faptul că printr-o proiecție ortogonală lungimea arcului se poate modifica numai micșorîndu-se, ceea ce înseamnă că se poate considera că lungimea proiecției arcului este mai mică decît 2. Se duce diametrul CD paralel cu coarda AB, iar centrul cercului se notează cu O. Se demonstrează ușor, că dintre curbele care unesc punctele A și B și intersectează diametrul CD, linia poligonală AOB are lungimea cea mai mică, egală cu 2. În consecință, proiecția considerată, care are lungimea mai mică decît 2, nu poate avea puncte comune cu diametrul CD, fiind deci situată în întregime în jumătatea de disc mărginită de semicercul $CABD$.

293. Fie p probabilitatea cu care tatăl cîștigă partida cu mama, iar q probabilitatea cu care el cîștigă partida cu fiul său, probabilitatea ca fiul să cîștige partida cu mama fiind r. Avînd în vedere toate cazurile posibile în care tatăl cîștigă concursul, se calculează ușor probabilitatea acestui eveniment pentru fiecare din cele trei moduri în care poate fi început concursul. Dacă se începe cu partida dintre tată și mamă, această probabilitate este

$$P_1 = p[q + (1 - q)(1 - r)p] + (1 - p)rpq.$$

Dacă prima partidă se desfăşoară între tată şi fiul, probabilitatea respectivă este

$$P_2 = q[(p + (1 - p)rq] + (1 - q)(1 - r)pq.$$

În fine, dacă tatăl nu ia parte la prima partidă, probabilitatea victoriei sale este

$$P_3 = rpq + (1 - r)pq = pq.$$

Este evident că $P_3 < P_2$ şi $P_3 < P_1$, deci neparticiparea la prima partidă este cea mai nepotrivită strategie a sa. Rămîne să se compare P_1 cu P_2. Este necesar să se impună în acest scop lui p şi q unele condiţii care rezultă din enunţul problemei. Se cunoaşte că fiul este jucătorul cel mai bun. De aceea tatăl îl învinge cu o probabilitate mai mică decît pe mamă, adică $p > q$. În acest caz se arată uşor că $P_1 > P_2$. Astfel tatăl are cea mai mare şansă de a cîştiga concursul dacă alege prima pereche formată din el şi soţia sa.

Se observă că s-a ajuns la această concluzie, fără a impune nici o condiţie asupra probabilităţii r, şi nefolosind în nici un fel condiţia problemei că tatăl este cel mai slab jucător. În fond aceste condiţii sînt de prisos, pentru rezolvarea problemei fiind suficient să se ştie că din punctul de vedere al tatălui fiul joacă mai bine decît mama ($q < p$).

294. Se roteşte ΔRSP (fig. 123) în jurul punctului R, în sensul acelor de ceasornic, cu 60°. În acest mod latura RP se suprapune peste segmentul RQ, iar punctul S se transformă într-un punct T aflat în exteriorul triunghiului PQR. Deoarece $RS = RT$ şi $\sphericalangle SRT = 60°$, ΔSRT este echilateral şi deci $ST = c$. Astfel, ΔQST este egal cu triunghiul dat ABC. Se duce prin punctul S o dreaptă paralelă cu PQ şi se notează prin K şi L punctele în care ea intersectează laturile PR şi QR respectiv. Prin rotaţia indicată a triunghiului RSP segmentul KS se transformă în segmentul LT. Se arată uşor că $\sphericalangle TLS = \sphericalangle SLQ = \sphericalangle QLT = 120°$ şi $SL = u$, $LT = v$, $LQ = w$. Însă $LT = KS$ şi $LK = LR$, deci

$$x = RL + LQ = LS + KS + LQ = u + v + w.$$

Fig. 123

295. Dacă centrul O al cercului înscris în triunghi nu se află în interiorul pătratului, el se află în interiorul sau pe frontiera unuia

din triunghiurile AED, EBF, GFC (fig. 124). Dacă punctul O este situat în interiorul triunghiului EBF, perpendiculara OK pe AC intersectează totdeauna ambele laturi ale pătratului și de aceea $OK > NK = FE > NE > OM$. Dacă acesta este situat în triun-

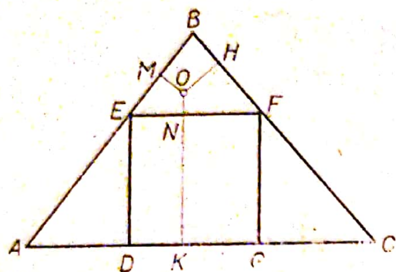


Fig. 124

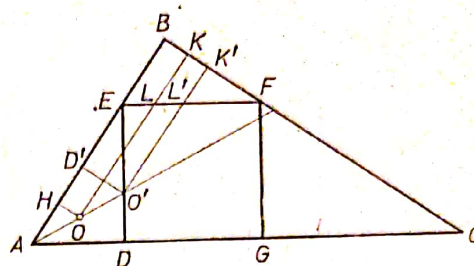


Fig. 125

ghiul AED, perpendiculara OK, dusă din punctul O pe latura BC intersectează fie două laturi alăturate ale pătratului, fie două laturi paralele ale acestuia. În cel de-al doilea caz, evident, segmentul perpendicularei care este cuprins în interiorul pătratului nu este mai mic decît latura, de aceea $OK > DE > OH = OM$. Fie, în primul caz, L punctul de intersecție al lui OK cu latura EF (fig. 125). Se notează cu O' punctul de intersecție al bisectoarei unghiului A cu latura ED, K' fiind proiecția punctului O' pe BC. Se obține că $OH \leqslant O'D' < O'E < O'L' < O'K' \leqslant OK$, adică $OH < OK$. De aceea $OK > OH$ în ambele cazuri, ceea ce contrazice presupunerea inițială.

296. Fiecărui elev i se atribuie un număr format din cinci cifre, cifra a k-a dintre acestea fiind 1 dacă elevul a rezolvat problema a k-a și 0 în caz că nu a rezolvat-o. Conform primei condiții din enunț fiecare număr nu se atribuie mai mult decît unui elev (elevi diferiți vor avea, în această corespondență, numere diferite). Nu pot fi astfel mai mult decît $2^5 = 32$ elevi participanți. Se va arăta că cea de-a doua condiție nu poate fi îndeplinită dacă numărul elevilor este exact 32. Se presupune că o anumită grupă de probleme nu a fost rezolvată de nici un elev, adică numărul $a_5a_4a_3a_2a_1$ nu a fost atribuit nici unui elev. Deoarece la olimpiadă a participat cel puțin un elev, fie numărul atribuit acestuia $b_5b_4b_3b_2b_1$. Se construiește succesiunea de numere:

$$N_0 = b_5b_4b_3b_2b_1, \quad N_1 = b_5b_4b_3b_2a_1, \quad N_2 = b_5b_4b_3a_2a_1,$$
$$N_3 = b_5b_4a_3a_2a_1, \quad N_4 = b_5a_4a_3a_2a_1, \quad N_5 = a_5a_4a_3a_2a_1.$$

În această succesiune sau două numere vecine N_{i-1} și N_i coincid pentru $b_i = a_i$ și de aceea sînt numere ale unuia și aceluiași elev, sau se deosebesc prin cifra de indice i, care dacă se neglijează, se

obține una și aceeași grupă de probleme și deci elevului cu numărul N_{i-1} îi corespunde conform celei de-a doua condiții elevul N_i. Deoarece numărul N_0 a fost atribuit, înseamnă că au fost atribuite și numerele N_1, N_2, N_3, N_4, N_5. Contradicția obținută arată că toate numerele au fost atribuite, deci numărul elevilor este 32.

297. În $\triangle ABC$ fie $BC > AB$ și deci $\hat{A} > \hat{C}$. Se notează cu O ortocentrul triunghiului. Se examinează următoarele posibilități:

I) $\hat{A}$ este ascuțit (fig. 126). Se consideră triunghiurile dreptunghice BOC' și BOA', în care $\sphericalangle BOA' = \hat{C}$ și $\sphericalangle BOC' = \hat{A}$ iar OC'

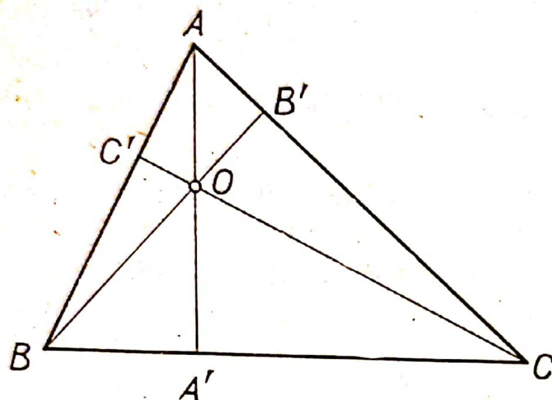


Fig. 126

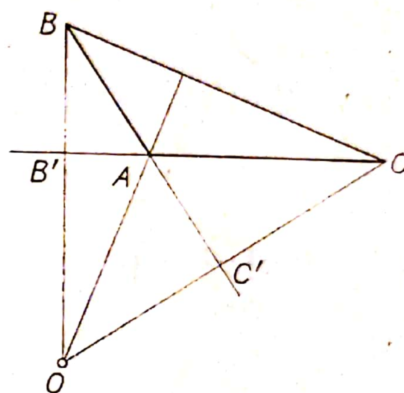


Fig. 127

este distanța de la punctul O la latura AB, OA' distanța de la același punct la latura BC.

$$OC' = OB \cdot \cos \hat{A} \text{ și } OA' = OB \cdot \cos \hat{C},$$

însă $\cos \hat{A} < \cos \hat{C}$ și deci $OC' < OA'$.

II) $\hat{A}$ este drept. În acest caz punctul O coincide cu punctul A, iar punctul C' coincide cu A, de aceea $OC' = 0$ și $OA' = h$ este distanța de la vîrful A la ipotenuză.

III) $\hat{A}$ este obtuz (fig. 127). În acest caz $\sphericalangle BOC' = 180° - \hat{A}$, însă $180° - \hat{A} = \hat{B} + \hat{C}$ și, prin urmare, $\sphericalangle BOC' > \hat{C}$. Restul raționamentelor sînt aceleași ca și pentru triunghiul ascuțitunghic.

298. Desfăcînd parantezele și identificînd coeficienții celor două polinoame, se găsește că:

$$1)\ a + b + c = a, \quad 2)\ ab + bc + ca = b, \quad 3)\ abc = c, \quad \text{adică}$$

$$1')\ b = -c, \quad 3')\ c = 0 \ \text{sau} \quad 3'')\ ab = 1.$$

C a z u l I. $c = 0$. Conform cu 1') înseamnă că $b = 0$ şi relaţia 2) este satisfăcută, oricare ar fi valoarea lui a.

C a z u l II. $ab = 1$. Se înlocuieşte c în 2) şi în 1'), obţinîndu-se că $b = ab + bc + ca = ab - b^2 - ab = -b^2$, adică sau $b = -1$ sau $b = 0$. Dacă $b = 0$, înseamnă că şi $c = 0$, ajungînd din nou la cazul I. Dacă $b = -1$, rezultă $c = 1$ şi din 3'') $a = -1$.

Astfel, $x^3 - ax^2 = x^2(x - a)$, a fiind arbitrar, sau $x^3 + x^2 - x - 1 = (x + 1)(x - 1)(x + 1)$.

299. Desfăcînd parantezele şi reducînd termenii asemenea, se obţine:

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2ac - 2bd)(a^2 + b^2) - a^2d^2 - b^2c^2 + 2abcd =$$

$$= (a^2 + b^2)^2 + (c^2 + d^2)(a^2 + b^2) - 2(a^2 + b^2)(ac + bd) - a^2d^2 -$$

$$- b^2c^2 + 2abcd = (a^2 + b^2)^2 + a^2c^2 + b^2d^2 - 2(a^2 + b^2)\cdot(ac + bd) +$$

$$+ 2abcd = (a^2 + b^2)^2 - 2(a^2 + b^2)(ac + bd) + (ac + bd)^2 =$$

$$= (a^2 + b^2 - ac - bd)^2.$$

300. Se descrie un cerc avînd ca diametru diagonala care iese din unghiul ascuţit. Celelalte două vîrfuri ale patrulaterului sînt situate în interiorul acestui cerc, deoarece prin enunţ unghiurile din aceste vîrfuri sînt obtuze şi deci diagonala care trece prin acestea este mai scurtă decît diametrul.

301. Conform condiţiei (a) există persoane care au televizoare, însă nu sînt zugravi. O astfel de persoană nu poate frecventa zilnic ştrandul, deoarece conform condiţiei (b) ar însemna că nu are televizor. Astfel, toţi aceştia nu frecventează zilnic ştrandul, şi deoarece sînt posesori de televizoare, afirmaţia (c) este adevărată, deci (c) rezultă din (a) şi (b).

302. Fie $\sphericalangle QOM = \varphi$, deci $ON = R\cos\varphi$, iar $OM = \dfrac{R}{\cos\varphi}$ (fig. 128). Se notează $\sphericalangle MOP$ prin θ, din $\triangle OPN$ găsindu-se că $PO \cdot \cos\theta = NO$, adică $PO \cdot \cos\theta = R\cos\varphi$ şi deci $\cos\theta = \dfrac{R\cos\varphi}{PO}$.

Fie M' proiecţia punctului M pe OP, deci

$$M'O = \frac{R}{\cos\varphi}\cos\theta = \frac{R\cdot R\cos\varphi}{PO\cos\varphi} = \frac{R^2}{PO} = \text{const.}$$

Din această cauză punctul M este situat pe perpendiculara dusă pe PO la distanţa $\frac{R^2}{PO}$ de punctul O. Reciproc, se poate uşor demonstra că orice punct al acestei perpendiculare este punct de intersecţie al tangentei în Q la cerc cu perpendiculara dusă din O pe PQ.

303. În locul maximului expresiei $\frac{8}{3}a^2 + 2b^2$ poate fi considerat maximul expresiei $\frac{3}{2}\left(\frac{8}{3}a^2 + 2b^2\right) = 4a^2 + 3b^2$. Se foloseşte următoarea propoziţie auxiliară:

Dacă $|u| \leqslant 1$, $|v| \leqslant 1$, rezultă că

$$|u - v| \leqslant 2. \qquad (1)$$

Egalitatea se realizează dacă şi numai dacă $u = 1$, $v = -1$ sau $u = -1$, $v = 1$. Inegalitatea (1) se aplică la funcţia $|f(x)| \leqslant 1$, pentru $x = 1$ şi $x = 0$, găsind

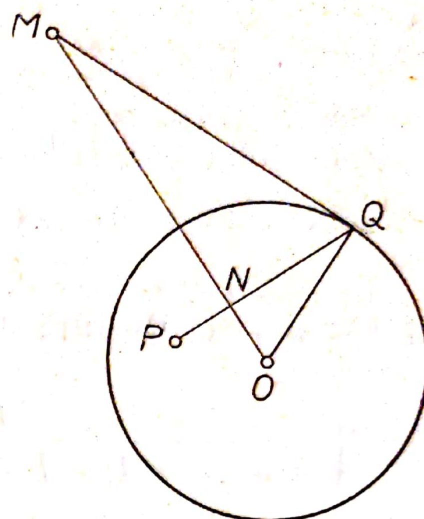


Fig. 128

$$2 \geqslant |f(1) - f(0)| = |a + b + c - c| = |a + b|.$$

Deci

$$(a + b)^2 \leqslant 4. \qquad (2)$$

Pentru $x = -1$ şi $x = 0$ se obţine

$$2 \geqslant |f(-1) - f(0)| = |a - b + c - c| = |a - b|.$$

Deci

$$(a - b)^2 \leqslant 4. \qquad (3)$$

Din relaţiile (2) şi (3) se obţine $4a^2 + 3b^2 = 2(a + b)^2 + 2(a - b)^2 - b^2 \leqslant 16$. Egalitatea se realizează cînd $b = 0$ şi, în consecinţă,

$$|a + b| = |a - b| = |a| = 2.$$

În acest caz $|f(1) - f(0)| = |(a + c) - c| = |a| = 2$. Din (1) rezultă că $|c| = 1$ şi $|a + c| = 1$. Astfel, sau $c = 1$, $a = -2$, $b = 0$ sau $c = -1$, $a = 2$, $b = 0$. În aceste două cazuri cînd $0 \leqslant |x| \leqslant 1$,

se găsește că $0 \leqslant x^2 \leqslant 1$, $-1 \leqslant 2x^2 - 1 \leqslant 1$. Astfel $|2x^2 - 1| = |-2x^2+1| = |ax^2+bx + c| \leqslant 1$, caz în care $\max\left(\frac{8}{3}a^2+2b^2\right) = \frac{2}{3}(4a^2 + 3b^2) = \frac{2}{3}\cdot 16 = \frac{32}{3}$.

304. $\frac{k}{k+l} + \frac{n-k}{n-(k+l)} = 2 + l\left(\frac{1}{n-(k+l)} - \frac{1}{k+l}\right) = 2 + S$.

Se va arăta că $S_{max} = n - 2$ dacă $n \geqslant 2$. Se examinează următoarele două cazuri posibile:

a) $k + l > n$. În acest caz $\frac{1}{n-(k+l)} < 0$ și $S < 0 \leqslant n - 2$.

b) $k + l < n$. Rezultă $k + l \leqslant n - 1$, și deoarece $k \geqslant 0$, înseamnă că $l \leqslant n - 1$. Rezultă din aceasta că

$$S = l\left(\frac{1}{n-(k+l)} - \frac{1}{k+l}\right) \leqslant (n-1)\left(\frac{1}{n-(n-1)} - \frac{1}{n-1}\right) = n - 2,$$

adică $S \leqslant n - 2$. Egalitatea se realizează dacă și numai dacă $k + l = n - 1$, adică $l = n - 1$, $k = 0$. Cazurile $n = 2$ și $n = 1$ se cercetează în mod asemănător.

În final se obține:

I. Dacă $n > 2$, rezultă $l = n - 1$, $k = 0$ și maximul expresiei este n.

II. Dacă $n = 2$, rezultă $l = 0$, oricare ar fi $k \neq 2$, sau $l = 1$, $k = 0$ și maximul expresiei este n.

III. Dacă $n = 1$, rezultă $l = 0$, oricare ar fi $k > 1$, iar maximul expresiei este 2.

305. $x_k^2 = x_k - x_{k+1}$. Prin urmare, $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i+1}) = x_1 - x_{n+1} < x_1 < 1$, deoarece toți x sînt pozitivi.

306. R e z o l v a r e a I. Din punctul arbitrar O se duc vectori în punctele A, B, C, D, A_1, B_1, C_1, D_1 (fig. 129) care se notează respectiv cu $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, $\vec{a}_1$, $\vec{d}_1$, $\vec{c}_1$, $\vec{d}_1$. Se obține:

$$\vec{a} + \vec{a}_1 = 2b, \quad (1) \qquad \vec{c} + \vec{c}_1 = 2\vec{d}, \quad (3)$$

$$\vec{d} + \vec{d}_1 = 2\vec{c}, \quad (2) \qquad \vec{d} + \vec{d}_1 = 2\vec{a}. \quad (4)$$

Din relaţia (1) se deduce

$$\vec{a} = 2\vec{b} - \vec{a}_1. \qquad (5)$$

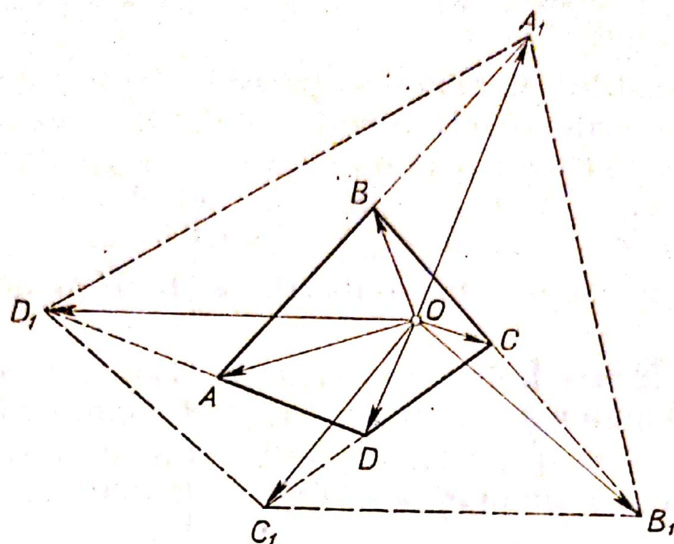


Fig. 129

Se înlocuieşte în relaţia (5) $\vec{b} = 2\vec{c} - \vec{b}_1$, dat de relaţia (2) şi se găseşte

$$\vec{a} = 4\vec{c} - 2\vec{b}_1 - \vec{a}_1. \qquad (6)$$

Din relaţia (3) se găseşte $\vec{c} = 2\vec{d} - \vec{c}_1$ şi se înlocuieşte în relaţia (6), găsind că $\vec{a} = 8\vec{d} - 4\vec{c}_1 - 2\vec{b}_1 - \vec{a}_1$, iar din relaţia (4) rezultă că $d = 2\vec{a} - \vec{d}_1$. Ţinînd seama de această exprimare a lui $\vec{d}$,

$$\vec{a} = 16\vec{a} - 8\vec{d}_1 - 4\vec{c}_1 - 2\vec{b}_1 - \vec{a}_1.$$

Rezultă astfel că $\vec{a} = \frac{1}{15}(8\vec{d}_1 + 4\vec{c}_1 + 2\vec{b}_1 + \vec{a}_1)$. Vectorii $\vec{a}_1$, $\vec{b}_1$, $\vec{c}_1$, $\vec{d}_1$ sînt cunoscuţi. Se poate deci construi vectorul $\vec{a}$, ceea ce înseamnă că se găseşte astfel punctul A, iar B este mijlocul lui AA_1, C al lui BB_1 şi D este mijlocul lui CC_1.

Rezolvarea II. Se consideră omotetia V_{A_1} de centru A_1 şi raport $\frac{1}{2}$ (fig. 130). În această omotetie punctul A se transformă în punctul B. Transformările analoage V_{B_1}, V_{C_1}, V_{D_1} transformă

succesiv punctul B în C, C în D, D în A, iar produsul $V = V_{A_1}V_{B_1}V_{C_1}V_{D_1}$ transformă pe A în el însuși. Transformarea V este o omotetie de centru A și raport $\left(\frac{1}{2}\right)^4$

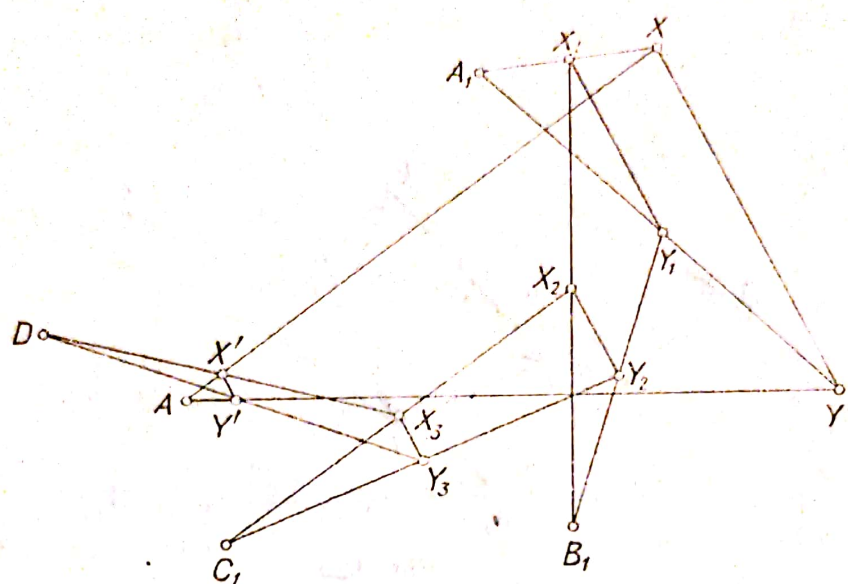


Fig. 130

Rezultă astfel următoarea construcție: se ia segmentul arbitrar XY și se construiește transformatul său $V(XY) = X'Y'$. Punctul A se va afla la intersecția dreptelor XX' și YY'.

307. Fie h_a și h_b înălțimile corespunzătoare laturilor a și b ale triunghiului. Conform enunțului $h_a \geqslant a$ și $h_b \geqslant b$. Pe de altă parte, întrucît perpendiculara are totdeauna lungimea mai mică decît lungimea oblicei duse din același punct, $h_a \leqslant b$ și $h_b \leqslant a$. Rezultă că $a \leqslant h_a \leqslant b \leqslant h_b \leqslant a$, ceea ce este posibil numai în cazul cînd $a = h_a = b = h_b = a$. Astfel, laturile a și b sînt egale și perpendiculare, deci triunghiul este dreptunghic isoscel.

Răspuns: Unghiurile triunghiului au mărimile respectiv 90°, 45°, 45°.

308. Se presupune că $m(m+1)$ este puterea de ordin k a unui număr întreg oarecare.

În acest caz, deoarece m și $m+1$ sînt, evident, relativ prime, fiecare din acestea trebuie să fie puterea de ordin k a unui număr întreg. Într-adevăr, dacă se descompune numărul $m(m+1)$ în factori primi: $m(m+1) = p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \dots p_n^{r_n}$, fiecare r_i trebuie să fie divizibil cu k, iar fiecare factor $p_i^{r_i}$ trebuie să intre fie în descompunerea lui m, fie în cea a lui $m+1$.

Două numere naturale vecine m şi $m+1$ nu pot fi însă puteri de ordinul k ale unor numere întregi (dacă $a^k = m$, înseamnă că

$$(a+1)^k > (a+1)a^{k-1} = a^{k-1} + a^k > m+1\,;\ k>1).$$

309. Un număr dă la împărţirea prin 9 totdeauna acelaşi rest ca şi suma cifrelor sale. Într-adevăr, dacă cifrele numărului sînt, începînd cu ultima, $a_0, a_1, \ldots, a_n$, numărul însuşi este $a_0 + 10a_1 + \ldots$ $\ldots + 10^n a_n$, suma cifrelor sale este $a_0 + a_1 + \ldots + a_n$, iar diferenţa $a_0 + 10a_1 + \ldots + 10^n a_n - a_0 - a_1 - \ldots - a_n = 9a_1 + 99a_2 + \ldots$ $\ldots + \underbrace{99\ldots 9}_{n \text{ cifre}} a_n$, evident, se divide cu 9. De aceea, în problema de faţă 1 se obţine din acele numere, care dau restul 1 la împărţirea prin 9, adică din numerele 1, 10, 19, ..., 1 000 000 000 ; 2 se obţine din numerele care dau restul 2 la împărţirea prin 9, adică din numerele 2, 11, 20, ..., 999 999 992. Este evident că primele sînt mai multe cu 1.

R ă s p u n s. Numărul 1 se repetă o dată mai mult decît 2.

310. Întrucît suma unghiurilor unui hexagon este 720°, fiecare unghi al unui hexagon convex cu unghiuri egale trebuie să fie de 120°. Laturile opuse ale unui astfel de hexagon sînt paralele.

a) Se presupune, fără a restrînge generalitatea, că $AB > ED$. Dacă se construiesc, în continuare, paralelogramele $ABCK$, $CDEL$, $EFAM$ (fig. 131), fiecare unghi al triunghiului format astfel este de 60°, deci $KL = LM = MK$. Însă $KL = KC - LC = AB - DE$, $LM = LE - ME = CD - FA$, $MK = MA - KA = FE - BC$, rezultînd egalitatea cerută $AB - DE = CD - FA = FE - BC$.

b) Fără a restrînge generalitatea se presupune că $a_1 > a_4$ (în caz contrar se poate lua $a'_1 = a_4$, $a'_2 = a_5$, $a'_3 = a_6$, $a'_4 = a_1$, $a'_5 = a_2$, $a'_6 = a_3$, evident). Se construieşte triunghiul echilateral KLM avînd latura $KL = LM =$ $= MK = a_1 - a_4 = a_5 - a_2 = a_3 - a_6$. Se poartă segmentul $LC = a_4$ pe prelungirea laturii KL, segmentul $ME = a_6$ pe prelungirea laturii LM şi segmentul $KA = a_2$ pe prelungirea laturii MK şi se construiesc paralelogramele $AKCB$, $CLED$, $EMAF$. Este uşor să se arate, că hexagonul $ABCDEF$ satisface condiţiile din enunţ, adică toate unghiurile sale sînt de 120°, iar $AB = a_1$, $BC = a_2$, $CD = a_3$, $DE = a_4$, $EF = a_5$, $FA = a_6$.

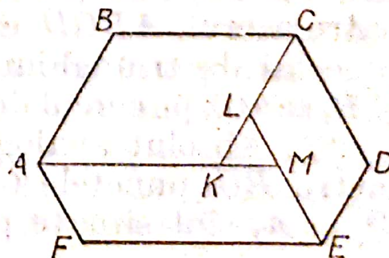


Fig. 131

311. Ridicînd ambii membri ai ecuației la pătrat și izolînd radicalul rămas se observă că acesta este egal cu $y^2 - x$, deci este un număr întreg. Repetînd raționamentul, se ajunge la concluzia că $\sqrt{x + \sqrt{x}} = m$ și $\sqrt{x} = k$ trebuie să fie numere întregi, deci $x = k^2$ și $x + \sqrt{x} = m^2$, adică $k(k + 1) = m^2$. Ultima egalitate este imposibilă cînd $k > 0$ deoarece k^2 este mai mic decît $k(k + 1)$ iar $(k + 1)^2$ este deja mai mare decît $k(k + 1)$, în consecință $k < m < k + 1$, adică m nu poate fi întreg.

R ă s p u n s. Singura soluție a ecuației în numere întregi este dată de $x = 0$, $y = 0$.

312. Fie A_1, B_1, C_1, D_1 (fig. 132) picioarele perpendicularelor duse din vîrfurile A, B, C, D ale patrulaterului $ABCD$ pe diagonalele sale BD, AC, BD, AC, respectiv. Fie K punctul de intersecție al diagonalelor AC și BD. Se demonstrează că $\triangle AKB \sim \triangle A_1KB_1$, $\triangle BKC \sim \triangle B_1C_1K$, $\triangle CKD \sim \triangle C_1KD_1$ și $\triangle DKA \sim \triangle D_1KA_1$, rezultînd, evident, asemănarea patrulaterelor $ABCD$ și $A_1B_1C_1D_1$, adică egalitatea unghiurilor lor și proporționalitatea laturilor analoage.

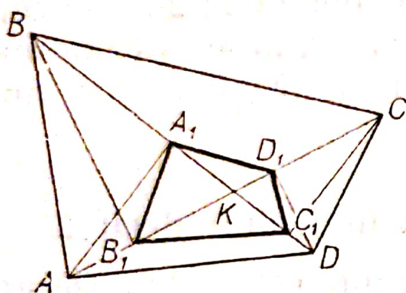


Fig. 132

Pentru a demonstra asemănarea triunghiurilor pot fi studiate unghiurile acestora, dar este mai simplu să se folosească următoarea proprietate geometrică: dacă X, X_1, Y_1, Y sînt patru puncte oarecare, situate pe un cerc, iar K este punctul de intersecție al dreptelor XY_1 și YX_1, rezultă că $\triangle XKY \sim \triangle X_1KY_1$. Egalitatea unghiurilor acestor triunghiuri se deduce din teorema asupra unghiului înscris în cerc (este necesar studiul diferitelor așezări ale punctelor X, X_1, Y, Y_1 pe cerc; acestea pot fi așezate într-unul din următoarele moduri: X, X_1, Y_1, Y; X, Y_1, X_1, Y; X, X_1, Y, Y_1; ultimul mod nu poate fi întîlnit în cadrul problemei de față, cînd patrulaterul $ABCD$ este convex). Pentru demonstrarea asemănării perechii de triunghiuri care interesează, se observă că punctele A_1 și B_1 se află pe cercul de diametru AB, deoarece $\sphericalangle AA_1B = \sphericalangle AB_1B = 90°$. Absolut analog punctele B_1 și C_1 se găsesc pe cercul de diametru BC, punctele C_1 și D_1 pe cercul de diametru CD, iar punctele D_1 și A_1 sînt situate pe cercul de diametru DA.

313. Orice număr natural care nu este prim sau pătrat de număr prim, poate fi reprezentat totdeauna sub forma $n = ab$, a și b fiind numere naturale diferite mai mici decît n. În continuare se studiază în ordine aceste cazuri.

Fie $n = ab$ $(a > 1,\ b > 1,\ a \neq b)$. Întrucît n este impar, a și b sînt impare, ceea ce înseamnă că $a \geqslant 3$, $b \geqslant 3$. De aceea în produsul $(n-1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (ab-1)$ intră ca factori a și $2a$ (întrucît $ab - 1 \geqslant 3a - 1 > 2a$), și de asemenea b și $2b$. Toate cele patru numere a, $2a$, b, $2b$ sînt evident diferite, a și b impare, $2a$ și $2b$ pare, $a \neq b$, $2a \neq 2b$. Rezultă că $(n-1)!$ este divizibil cu $a^2b^2 = n^2$.

Fie, în continuare, $n = p^2$, p fiind un număr prim. Dacă $p^2 - 1 \geqslant 4p$, înseamnă că $p^2 - 1 \geqslant 4p > 3p > 2p > p$, și, în consecință, $(p^2-1)!$ se divide cu $p^4 = n^2$. Aceasta rezultă evident din faptul că pentru $p \geqslant 5$, $p^2 - 4p - 1 \geqslant (p-4)p - 1 \geqslant 1 \cdot 5 - 1 > 0$.

Rămîn următoarele posibilități: $n = 3^2 = 9$, sau n este număr prim. Se arată ușor că pentru toate aceste valori ale lui n, numărul $(n-1)!$ nu se divide la n^2. Într-adevăr, cînd n este număr prim, $(n-1)!$ nu se divide nici la n. Pentru $n = 9$, $(9-1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8$ se divide numai prin 3^2 și nu se divide prin $9^2 = 3^4$.

Răspuns: n este orice număr prim par sau numărul 9.

314. Se duc perpendicularele din punctul O pe laturile patrulaterului, obținîndu-se patru perechi de triunghiuri egale, rezultînd deci că (fig. 133) $\hat{1} = \hat{2}$, $\hat{3} = \hat{4}$, $\hat{5} = \hat{6}$, $\hat{7} = \hat{8}$. Întrucît $\hat{1} + \hat{2} + \hat{3} + \hat{4} + \hat{5} + \hat{6} + \hat{7} + \hat{8} = 360°$, iar $\sphericalangle AOB + \sphericalangle COD = 360° - (\hat{2} + \hat{3} + \hat{6} + \hat{7}) = \hat{1} + \hat{4} + \hat{5} + \hat{8}$, din egalitățile scrise mai sus se deduce că $\sphericalangle AOB + \sphericalangle COD$ este egal cu jumătate din unghiul de 360°, adică 180°, ceea ce trebuia demonstrat.

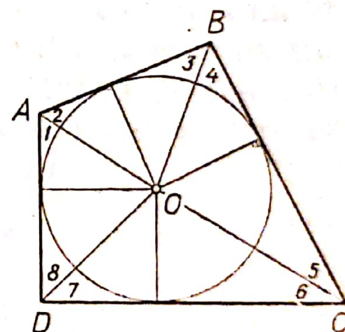


Fig. 133

315. Expresia $k^n - b^n$ este divizibilă totdeauna cu $k - b$, întrucît $k^n - b^n = (k-b)(k^{n-1} + k^{n-2}b + k^{n-3}b^2 + \ldots + b^{n-1})$ (k și b sînt numere arbitrare diferite, $k \neq b$). Astfel, $(k^n - b^n) - (k^n - a) = a - b^n$ se divide cu $k - b$ pentru orice $k \neq b$, adică se divide cu orice număr întreg nenul, ceea ce se poate realiza numai în cazul cînd $a - b^n = 0$, adică $a = b^n$.

Greșeala caracteristică întîlnită în lucrările concurenților la rezolvarea acestei probleme era recurgerea la teorema lui Bèzout. O astfel de cale este principial greșită, deoarece în teorema lui Bèzout este vorba despre divizibilitatea polinoamelor, iar în problemă intervine divizibilitatea numerelor.

316. Fie k^2 numărul care se obține prin ștergerea ultimelor două cifre ale lui n^2, acesta din urmă neterminîndu-se în două zerouri. Această condiție se poate scrie sub forma: $0 < n^2 - 100k^2 < 100$.

Prima inegalitate este echivalentă cu $n > 10k$, adică $n \geqslant 10k + 1$. A doua inegalitate $n^2 - 100k^2 < 100$ nu este adevărată pentru $k \geqslant 5$. Întrucît se obține chiar pentru $10k + 1$, cea mai mică valoare posibilă pentru n, $(10k + 1)^2 - (10k)^2 = 20k + 1 > 100$, pentru $k = 4$ este convenabil numai $n = 10k + 1 = 41$, deoarece $42^2 - 1600$ deja depășește pe 100; pentru $k \leqslant 3$ nu se obțin valori ale lui n^2 care să depășească 1000, întrucît

$$n^2 < 100k^2 + 100 \leqslant 100 \cdot 9 + 100 = 1000.$$

Răspuns: $1681 = 41^2$.

317. Segmentele care compun drumul gîndacului se numerotează în ordinea parcurgerii lor. Se convine ca una din cele trei direcții ale liniilor rețelei să se numească *orizontală* și se studiază care pot fi numerele segmentelor orizontale care intră în compunerea drumului gîndacului. Fie *a* și *b* două segmente orizontale vecine, în sensul că între ele nu se găsesc alte segmente orizontale, adică între *a* și *b* întreg drumul gîndacului este constituit de segmente de altă direcție decît cea orizontală. Este clar astfel că situația reprezentată de linia îngroșată din figură (134.a), cînd gîndacul parcurge latura

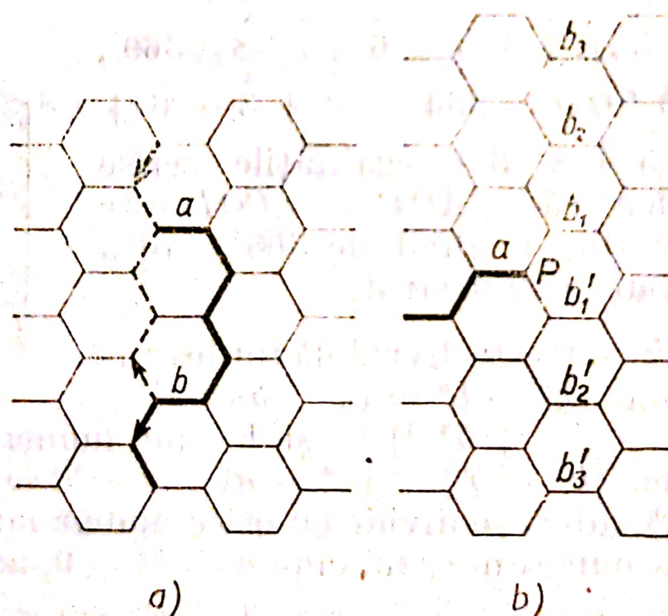


Fig. 134

a într-un sens și latura *b* în sens opus, este imposibilă: în acest caz o parte din drumul gîndacului poate fi scurtat, cum este arătat prin linia punctată. Rezultă astfel că toate segmentele orizontale care sînt întîlnite în drum de gîndac, se parcurg în unul și același sens.

Dacă gîndacul ajunge în punctul P (fig. 134, b) pe segmentul a, următorul segment orizontal din drumul său va fi numai unul din segmentele b_1, b_2, b_3, ... sau b_1', b_2', b_3' ... Se observă ușor că numărul segmen-lor intermediare între a și b este neapărat impar, adică segmentele a și b au aceeași paritate. Rezultă astfel că numărul tuturor segmentelor orizontale care intră în drumul gîndacului au aceeași paritate. Deoarece rețeaua este simetrică în cele trei direcții, s-a demonstrat astfel că 1) gîndacul nu se mișcă decît pe cel mult trei direcții diferite, segmentele unei direcții date fie nefiind parcurse deloc, sau fiind parcurse în un singur sens. 2) numerele tuturor segmentelor de direcție dată care intră în compunerea drumului gîndacului au aceeași paritate. Se deduce în continuare cu ușurință, că sau toate segmentele cu numere pare au același sens de parcurgere, sau toate segmentele cu numere impare. Întrucît drumul gîndacului conține cîte 50 din fiecare din aceste două tipuri, afirmația din enunț este demonstrată.

Observație. Această problemă a fost una din cele mai grele la olimpiadă. Se pot da cîteva alte rezolvări diferite (de exemplu, se poate folosi inducția față de lungimea $2n$ a drumului gîndacului, sau descompunerea vectorului AB după trei direcții paralele cu liniile rețelei), toate fiind însă destul de complicate.

318. După ce au fost așezate parantezele în expresia $x_1 : x_2 : \ldots$ $\ldots : x_n$, fiecare semn de împărțire leagă două expresii, prima din acestea trebuie să fie împărțită la a doua (fiecare din aceste expresii poate fi o literă separată x_k sau o paranteză conținînd cîteva astfel de litere). Se vor face împărțirile în ordinea indicată și se va scrie de fiecare dată rezultatul sub forma unei fracții

$$\frac{x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_p}}{x_{j_1} x_{j_2} \ldots x_{j_q}}.$$

Dacă A și B sînt două astfel de fracții și trebuie împărțită A la B, se înmulțește fracția A cu inversa fracției B, adică la numărătorul fracției A se înmulțesc toți x_k de la numitorul fracției B, iar la numitorul fracției A toți x_k de la numărătorul fracției B. Rezultă în final că fiecare x_k se găsește la numărător sau la numitor după cum s-a împărțit de un număr de ori par sau impar la expresia care conținea pe x_k, cu alte cuvinte în funcție de numărul semnelor de împărțire care precedau pe x_k și se refereau la expresia care conținea pe x_k.

După aceste observații preliminarii se trece la examinarea problemei: care fracții pot fi obținute așezînd în diferite moduri parantezele în expresia $x_1 : x_2 : \ldots : x_n$. Este evident că x_1 va fi situat totdeauna la numărător (înaintea sa nu există semne de împărțire

care să-l poată transforma în numitor). Este aproape evident că x_2 va fi totdeauna la numitor (semnul de împărțire așezat înaintea lui x_2 se referă la acesta sau la o expresie care îl conține). Este mult mai puțin evidentă distribuirea celorlalte litere $x_3, x_4, \ldots, x_n$ la numitor sau numărător într-un mod total arbitrar; principala dificultate a problemei constă în demonstrarea acestei afirmații. Va rezulta din aceasta că se pot găsi 2^{n-2} fracții : fiecare dintre $x_3, x_4, \ldots$ $\ldots, x_n$ poate intra în componența numărătorului sau a numitorului. Se dau în continuare două demonstrații.

P r i m a d e m o n s t r a ț i e. Pentru a se obține fracția

$$\frac{x_1 x_{i_1} \ldots x_{i_2-1} x_{i_2} x_{i_3+1} \ldots x_{i_4-1} x_{i_4} \ldots}{x_2 x_3 \ldots x_{i_1-1} x_{i_1} x_{i_2+2} \ldots x_{i_3-1} x_{i_3} x_{i_4+1} \ldots x_{i_5-1} x_{i_5} \ldots,} \qquad (*)$$

$$(2 \leqslant i_1 \leqslant i_2 < i_3 \ldots < i_m = n),$$

trebuie mai întîi să se facă „în ordine“ împărțirile $(\ldots((x_1 : x_2) :$ $: x_3) : \ldots : x_{i_1-1}) = P_1$ și în general

$$(\ldots(x_{i_k} : x_{i_{k+1}}) : \ldots : x_{i_{k+1}-1}) = P_k, \ldots x_{i_m} = P_m,$$

iar apoi în „ordine inversă“ :

$$P_1 : (P_2 : \ldots : (P_{m-1} : P_m) \ldots).$$

Faptul că se obține fracția cerută se poate arăta fie direct $\left(\text{observînd că } P_k = \dfrac{x_{i_k}}{x_{i_{k+1}} \ldots x_{i_{k+1}-1}}\right)$ fie cu ajutorul criteriului arătat anterior, (din semnele de împărțire care preced un anumit x_j, la expresia care conține pe x_j se referă acele semne care stau între grupe, și de asemenea semnul din fața lui x_j). Este clar că numărătorul și numitorul oricărei fracții în care x_1 stă la numărător iar x_2 la numitor pot fi descompuși astfel ca să se obțină fracția de forma (*), de aceea demonstrația este încheiată.

A d o u a d e m o n s t r a ț i e (prin inducție). Se admite că expresia $x_1 : x_2 : \ldots : x_n$ se scrie, după o aranjare a parantezelor, sub forma unei fracții A. Dacă în această expresie se înlocuiește x_n cu expresia $(x_n : x_{n+1})$ se obține ca rezultat fracția A, în care inter-

vine x_{n+1} care va fi aşezat de cealaltă parte a liniei de fracţie cu x_n adică dacă x se află la numitor, x_{n+1} se află la numărător şi invers.

Se presupune în continuare că expresia considerată se termină astfel: ... $(P : x_n)$ (P este o expresie sau numai x_{n-1}). Dacă se înlocuieşte expresia $(P : x_n)$ cu expresia $((P : x_n) : x_{n+1})$ se obţine, evident, aceeaşi fracţie A, în care intervine în plus x_{n+1}, care va sta de aceeaşi parte a liniei de fracţie ca şi x_n (deoarece $(P : x_n) : x_{n+1} = P : (x_n \cdot x_{n+1})$).

Rezultă astfel că dacă se poate obţine orice fracţie (cu x_1 la numărător şi cu x_2 la numitor), pentru un n oarecare, $n \geqslant 2$, se poate obţine orice astfel de fracţie pentru expresia $x_1 : x_2 : \ldots : x_{n+1}$. Deoarece pentru $n = 2$ afirmaţia este adevărată, va fi adevărată pentru orice $n \in N$.

Răspuns: 2^{n-2} fracţii.

Observaţie. Este evident că se poate obţine aceeaşi fracţie pentru două moduri diferite de aranjare a parantezelor. Algoritmul dat în prima demonstraţie (ca şi construcţia inductivă dată de cea de a doua demonstraţie) indică unul din multele moduri de aranjare a parantezelor, pentru care se obţine respectiva fracţie.

319. Se arată uşor că un cub poate fi descompus în cinci tetraedre, cum se arată în fig. 135; dacă se separă tetraedrele $A'AB'D'$, $C'CB'D'$, $BB'AC$ şi $DD'AC$, rămîne tetraedrul regulat $B'D'AC$.

Poate părea evident că un cub nu poate fi descompus în un număr mai mic de tetraedre, însă demonstraţia riguroasă nu este deloc simplă. În continuare se expune cea mai scurtă demonstraţie.

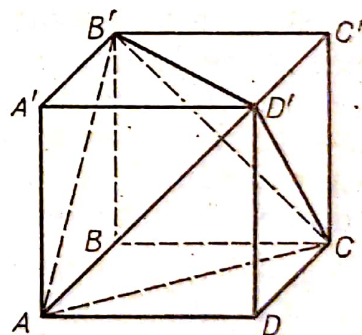


Fig. 135

Fie cubul de muchie a descompus în cîteva tetraedre. Cel puţin două din acestea au baza aşezată pe faţa $ABCD$ a cubului (faţa cubului este un pătrat şi nu poate fi faţă pentru nici un tetraedru). Absolut analog există cel puţin două tetraedre a căror bază este aşezată pe faţa $A'B'C'D'$ a cubului. Aceste tetraedre sînt evident diferite de primele două, deoarece tetraedrul nu poate avea două feţe paralele. Astfel se constată existenţa a cel puţin 4 tetraedre. Aceste 4 tetraedre nu pot umple cubul, deoarece suma volumelor primelor două nu depăşeşte $\frac{a^3}{3}$ (suma ariilor bazelor nu depăşeşte a^2 şi înălţimea fiecăruia nu depăşeşte a),

suma volumelor ultimelor două tetraedre de asemenea nu depăşeşte $\frac{a^3}{3}$, iar volumul cubului este a^3. Astfel există cel puţin un al cincelea tetraedru.

Alte demonstraţii, care nu folosesc ideea comparării volumelor, sînt mult mai lungi.

320. 1. Se demonstrează că oricare ar fi mulţimea de numere $x_1, x_2, \ldots, x_n$, nu toate egale între ele, prin operaţiile indicate în enunţul problemei cel mai mare număr din mulţime se micşorează, iar cel mai mic se măreşte.

Într-adevăr, $\frac{x_i + x_{i+1}}{2}$ nu depăşeşte pe cel mai mare din numerele x_i şi x_{i+1}, şi este egal cu acesta numai cînd $x_i = x_{i+1}$ $\left(\text{analog pentru } \frac{x_n + x_1}{2}\right)$. De aceea, dacă x este cel mai mare număr în mulţimea $x_1, \ldots, x_n$, cel mai mare număr din mulţimea $\frac{x_1 + x_2}{2}$, $\frac{x_2 + x_3}{2}, \ldots, \frac{x_n + x_1}{2}$ nu depăşeşte pe x şi este egal cu acesta numai dacă în mulţimea $x_1, x_2, \ldots, x$ se repetă odată sau de mai multe ori succesiunea xx. (numerele se consideră aşezate circular, adică x_n este aşezat lîngă x_1). Dacă în mulţimea $x_1, x_2, \ldots, x_n$ cea mai mare lungime a unui lanţ format din numere alăturate x este $k < n$, în următoarea mulţime această lungime va fi, evident $k - 1$, apoi $k - 2$ etc. după k astfel de paşi cel mai mare număr din mulţime fiind mai mic decît x. Demonstraţia faptului că cel mai mic număr din mulţime se va mări este analoagă.

2. Se presupune că din o mulţime de numere întregi $a_1, a_2, \ldots, \ldots, a_n$ se obţin totdeauna mulţimi de numere întregi. Din cele deduse mai sus însă rezultă că după un număr de paşi din această mulţime se obţine o alta, compusă numai din numere egale.

Într-adevăr, diferenţa între cel mai mare şi cel mai mic număr din mulţime, care rămîne pozitivă, trebuie, conform celor demonstrate să se micşoreze. Dacă rămîne tot timpul un număr întreg, după un număr de paşi se anulează.

Mai trebuie demonstrat că dintr-o mulţime de numere diferite două cîte două $a_1, a_2, \ldots, a$ nu se poate obţine prin nici un pas o mulţime de numere egale.

3. Dacă din o mulţime oarecare $z_1, z_2, \ldots, z_n$ se obţine mulţimea $\frac{z_1+z_2}{2}, \frac{z_2+z_3}{2}, \ldots, \frac{z_n+z_1}{2}$, de numere egale, adică

$$\frac{z_1+z_2}{2}=\frac{z_2+z_3}{2}=\frac{z_3+z_4}{2}=\ldots=\frac{z_{n-1}+z_n}{2}=\frac{z_n+z_1}{2},$$

atunci, evident, se găseşte

$$z_1=z_3,\ z_2=z_4,\ \ldots,\ z_{n-2}=z_2,\ z_{n-1}=z_1,\ z_n=z_2,$$

adică în mulţimea $z_1, z_2, \ldots, z_n$ numerele sînt egale „din două în două". Dacă n este impar, aceasta este posibil numai dacă $z_1=z_2=\ldots=z_n$. Astfel, pentru n impar nu se poate obţine o mulţime de numere egale din o alta în care nu toate numerele sînt egale între ele.

4. În cazul că n este par, de forma $n=2k$ trebuie cercetat din ce fel de mulţime $y_1, y_2, \ldots, y_n$ se poate obţine o mulţime în care numerele să fie egale „din două în două":

$$\frac{y_1+y_2}{2}=b,\ \frac{y_3+y_4}{2}=b,\ \frac{y_5+y_6}{2}=b,\ \ldots,\ \frac{y_{2k-1}+y_{2k}}{2}=b,$$

$$\frac{y_2+y_3}{2}=c,\ \frac{y_4+y_5}{2}=c,\ \frac{y_6+y_7}{2}=c,\ \ldots,\ \frac{y_{2k}+y_1}{2}=c,\ (b\neq c).$$

Se observă că suma tuturor numerelor de pe primul rînd şi de pe al doilea rînd este aceeaşi: $\frac{y_1+y_2+\ldots+y_{2k}}{2}$, rezultînd că $b=c$. Contradicţia obţinută arată că nu se poate obţine după regula de mai sus mulţimea $a, c, b, c, c, \ldots$ $(b\neq c)$.

S-a arătat, în acest mod, că din o mulţime de numere distincte două cîte două nu se poate obţine o mulţime de numere egale. Rezolvarea este astfel încheiată.

321. Se notează cu S_1, S_2, S_3, S_4 şi p_1, p_2, p_3, p_4 ariile şi semiperimetrele triunghiurilor ABE, BCE, CDE, DAE respectiv (fig. 136). Deoarece aria fiecărui triunghi este egală cu produsul semiperimetrului prin raza cercului înscris, trebuie demonstrat că

$$\frac{p_1}{S_1}+\frac{p_3}{S_3}=\frac{p_2}{S_2}+\frac{p_4}{S_4}.$$

Deoarece $ABCD$ este patrulater circumscris, $AB + CD = BC + AD$. Adăugînd la ambii termeni suma diagonalelor, se obţine

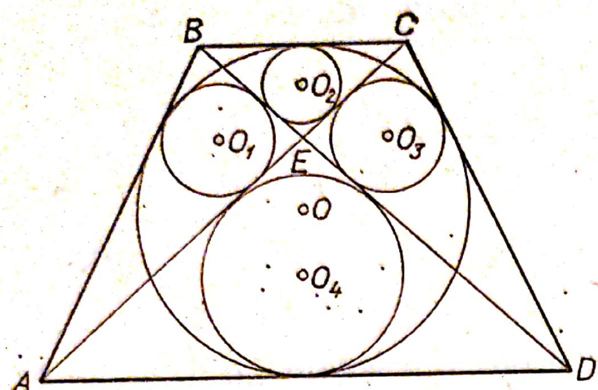


Fig. 136

$$2p_1 + 2p_3 = 2p_2 + 2p_4,$$

adică

$$p_1 + p_3 = p_2 + p_4.$$

Patrulaterul $ABCD$ este trapez ($AD \parallel BC$), de aceea triunghiurile ABD şi ACD au aceeaşi arie, deci $S_1 = S_3$. Se va nota

$$S_1 = S_3 = S.$$

$\triangle BCE \sim \triangle DAE$, prin urmare $\frac{p_2}{p_4} = \frac{BE}{ED}$. Întrucît raportul ariilor a două triunghiuri care au aceeaşi bază este egal cu raportul înălţimilor lor, se arată uşor că

$$\frac{S_2}{S} = \frac{S_2}{S_3} = \frac{BE}{ED} \text{ şi } \frac{S_1}{S_4} = \frac{S}{S_4} = \frac{BE}{ED}.$$

de aceea $\frac{S_2}{S} = \frac{S}{S_4} = \frac{p_2}{p_4}$, rezultînd că $S = \frac{p_4}{p_2} \cdot S_2$, şi $S = \frac{p_2}{p_4} S_4$. Din egalitatea $p_1 + p_3 = p_4 + p_2$ se obţine

$$\frac{p_1}{S} + \frac{p_3}{S} = \frac{p_4}{S} + \frac{p_2}{S}.$$

Înlocuind în aceasta pe primul S cu S_1, pe al doilea cu S_3, pe al treilea cu $\frac{p_4}{p_2} S_2$ şi pe al patrulea cu $\frac{p_2}{p_4} S_4$, se obţine egalitatea cerută.

322. Se rezolvă punctul b). La prima cîntărire expertul aşază pe talerul din stînga al balanţei prima monedă, iar pe talerul din dreapta cea de-a opta. Talerul din dreapta se constată că este mai greu, balanţa dezechilibrîndu-se. Este demonstrat astfel că prima monedă este falsă iar cea de-a opta este veritabilă.

La cea de-a doua cîntărire expertul adaugă pe talerul din stînga cele de-a noua şi a zecea monedă, iar pe cel din dreapta cele de a doua şi a treia. De această dată este mai greu talerul stîng. Dat fiind că pe fiecare taler se găseşte acelaşi număr de monezi, înseamnă că pe talerul stîng se găsesc mai multe monede veritabile decît pe cel din dreapta. Prin aceasta, tribunalul este convins că cele de-a noua şi a zecea monede sînt veritabile, iar cele de-a doua şi a treia false

La cea de-a treia cîntărire expertul aşază pe talerul stîng monedele a patra, a cincea, ..., a zecea, iar pe talerul din dreapta restul de monede. Talerul din dreapta se înclină, deci pe acesta se află mai multe monede veritabile decît pe cel din stînga. Tribunalul trage de aici concluzia că toate cele patru noi monede de pe talerul drept sînt veritabile, iar cele patru noi monede de pe talerul stîng sînt false. Tribunalul este, astfel, complet edificat.

323. Demonstraţia se face prin reducere la absurd. În acest caz numărul x compus din nouă cifre se poate scrie $x = a^2$, numărul a terminîndu-se de asemenea cu cifra 5, adică $a = 10b + 5$, deci $x = 100b(b + 1) + 25$, ceea ce arată că penultima cifră a lui x este 2. Se observă uşor că un număr de forma $b(b + 1)$ se termină neapărat cu una din cifrele 0, 2 sau 6. Cifra 2 a fost deja întîlnită pe penultimul loc, iar 0 nu intră în compunerea acestui număr, deci a treia cifră de la urmă, în scrierea lui x, este 6. Se deduce că $x = 1000c + 625$. În acest caz a se divide cu 25, deci $a = 100d + 25$ şi $x = 10\,000d^2 \pm 5\,000d + 625$. A patra cifră de la urmă în scrierea lui x trebuie să fie deci sau 0 sau 5, ceea ce este imposibil.

324. Demonstraţia se face prin inducţie, pasul inductiv fiind uşor de făcut de la n la $n + 2$. Fie construcţia săgeţilor realizată pentru punctele $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Se adaugă două noi puncte x_{n+1} şi x_{n+1} şi se completează săgeţile care sînt deja construite cu săgeţile care pleacă din toate punctele $x_1, x_2, \ldots, x_n$ către punctul x_{n+1}, cu cele care pleacă din punctul x_{n+2} către toate punctele $x_1, x_2, \ldots, x_n$, şi cu săgeata care pleacă din x_{n+1} în x_{n+2}. Se constată uşor că toate punctele $x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}$ sînt astfel unite prin săgeţi conform condiţiilor din enunţ (fig. 137). Etapa de verificare a inducţiei se parcurge pentru cazul $n = 3$ şi cazul $n = 6$, construcţia corespunzătoare a săgeţilor fiind reprezentată în fig. 138. Realizînd ca mai sus pasul inductiv, se pot construi astfel de săgeţi pentru orice $n \geqslant 6$ par şi

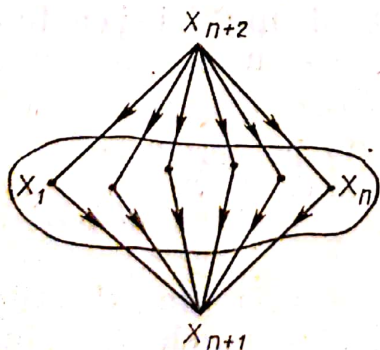


Fig. 137

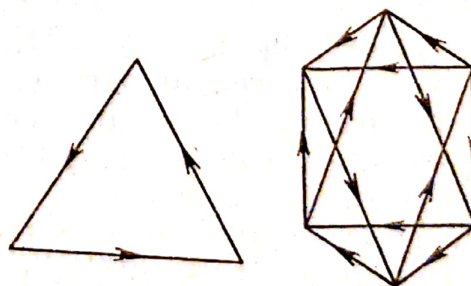


Fig. 138

$n \geqslant 3$ impar. Cititorului i se propune demonstrația faptului că o astfel de construcție nu este posibilă pentru $n = 4$.

325. Se dă $\sphericalangle BCA_1 = \sphericalangle B_1CA$. Adăugînd la membri acestei egalități unghiul ACB se obține că $\sphericalangle A_1CA = \sphericalangle BCB_1$. Din această egalitate și din $\frac{A_1C}{BC} = \frac{AC}{B_1C}$ (din cauză că $\triangle A_1CB \sim \triangle ACB_1$) rezultă că $\triangle A_1CA \sim \triangle BCB_1$ și, în consecință, $\sphericalangle AA_1C = \sphericalangle B_1BC$. Considerînd triunghiurile BDE și ECA_1 (fig. 139) rezultă că $\sphericalangle BDA = \sphericalangle BCA_1$. Se vede astfel că punctul D este situat pe cercul α, cricumscris triunghiului A_1BC. La fel se demonstrează, că punctul D se află pe cercul β circumscris triunghiului AB_1C. S-a demonstrat, în acest fel, că punctul de intersecție al lui AA_1 cu α coincide cu punctul de intersecție al lui BB_1 cu β. Raționamente analoage arată că punctul de intersecție al lui AA_1 cu α coincide cu punctul de intersecție al lui CC_1 cu cercul γ circumscris triunghiului AC_1B. Astfel, cercurile date la punctul a) al problemei și dreptele de la punctul b) trec toate prin un același punct.

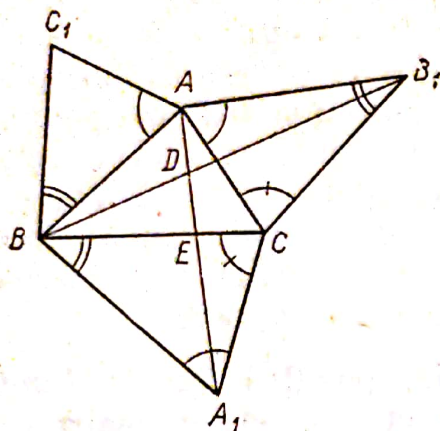


Fig. 139

326. Se renumerotează cele N persoane. Dacă N este impar, ultimei persoane nu i se va face cunoștință cu nimeni. De aceea, fără a restrînge generalitatea, se poate considera că trebuie făcută cunoștința la N persoane între ele, pentru $N = 2n$. Se face cunoștința celei de a k-a persoane ($k \leqslant n$) cu cea de a N-a, $N - 1$-a, ..., $(N - k + 1)$-a. În acest caz cea de a k-a persoană va avea k cunoștințe. Același număr de cunoștințe îl va avea și cea de a $n + k$-a persoană. Nu există în acest caz trei persoane care să aibă același număr de cunoștințe.

327. Se observă că în total regele face 64 de mutări și că lungimea unei astfel de mutări a regelui este 1 pe orizontală sau verticală, iar pe diagonală este $\sqrt{2}$. Din această cauză drumul cel mai scurt va fi cel în care regele parcurge cele 64 de pătrățele făcînd numai mutări pe orizontală sau pe verticală. Se arată ușor că un astfel de drum este realizabil efectiv, lungimea liniei poligonale parcurse de rege fiind în acest caz 64.

Se cercetează în continuare care este cel mai lung drum posibil ceea ce evident, înseamnă a găsi cel pe care regele face numărul maxim de mutări în diagonală. Se fixează un drum oarecare (fig. 140).

Se numerotează succesiv toate cîmpurile marginale ale tablei şi se împarte în sectoare linia poligonală închisă care descrie drumul regelui, în modul următor. Se numerotează cu 1 cîmpul din colţul din stînga jos al tablei şi se observă că cel puţin unul din cele două segmente ale liniei poligonale care pleacă din el îl unesc cu un cîmp orizontal sau vertical. Se numerotează acest cîmp cu 2 (fără a restrînge generalitatea îl considerăm pe orizontală) şi astfel drumul de-a lungul liniei poligonale este orientat, iar cîmpurile marginale ale tablei se numerotează de la 1 la 28. Se va arăta prin inducţie că primul cîmp marginal care se întîlneşte pe drum la mişcarea din cîmpul k este cîmpul $k+1$ (pentru $k=28$ cîmpul următor este 1). Pentru $k=1$ aceasta este adevărat pe baza alegerii celui de al doilea cîmp. Fie l primul cîmp marginal întîlnit în drum după plecarea din cîmpul $k (k>1)$. Dacă $l=k-1$, drumul de la cîmpul k la cîmpul $k-1$ împreună cu sectorul de drum de la cîmpul $k-1$ la k, considerat la pasul precedent şi necuprinzînd alte cîmpuri marginale, conform ipotezei de la inducţie, formează un drum închis care nu trece prin cîmpul $k+1$, ceea ce nu se poate. Dacă $l \neq k-1$ şi $l=k+1$, drumul între cîmpurile k şi l împarte tabla în două regiuni nevide şi se constată uşor că dacă, continuîndu-şi drumul, regele se întoarce din cîmpul l în una din aceste regiuni, el nu mai poate ajunge în alta fără a intersecta un sector de drum deja parcurs. Este posibilă, astfel, numai egalitatea $l=k+1$.

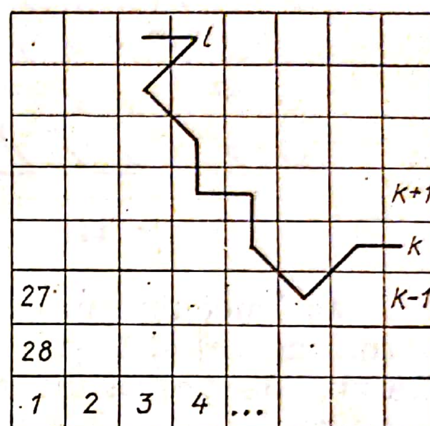


Fig. 140

Astfel, întregul drum închis se descompune în 28 de sectoare disjuncte, de la cîmpul k la cîmpul $k+1$ ($k=1, 2, \ldots, 28$). Întrucît trecerea de la cîmpul k la cîmpul $k+1$ este însoţită de schimbarea culorii, iar schimbarea culorii este posibilă numai prin mutări orizontale sau verticale, adică mutări de lungime 1, înseamnă că fiecare din cele 28 sectoare de drum trebuie să conţină cel puţin o mutare de lungime 1, deci mutări de lungime $\sqrt{2}$ nu pot fi mai mult de 36. Faptul că numărul de mutări diagonale este exact 36 se constată, construind un exemplu corespunzător (fig. 141). În acest fel, drumul cel mai lung are lungimea $28+36\sqrt{2}$.

328. Se observă că $\sphericalangle OAE = \sphericalangle ACE$ (fig. 142) deoarece aceste unghiuri au ca măsură jumătatea arcului AmE. Deoarece $AC \parallel OB$, rezultă că $\sphericalangle ACE = \sphericalangle EOK$. Se deduce că $\sphericalangle EOK = \sphericalangle OAE$ şi triunghiurile AOK şi OKE sînt asemenea, găsind din asemănarea

acestora că $\frac{OK}{AK} = \frac{EK}{OK}$, sau $OK^2 = EK \cdot AK$. În afară de aceasta, puterea punctului K față de cerc se scrie $KB^2 = EK \cdot AK$ și, prin urmare, $OK = KB$.

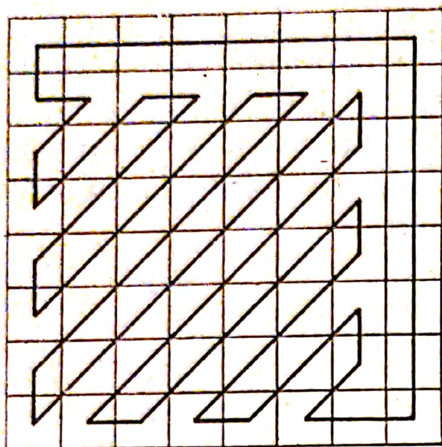


Fig. 141

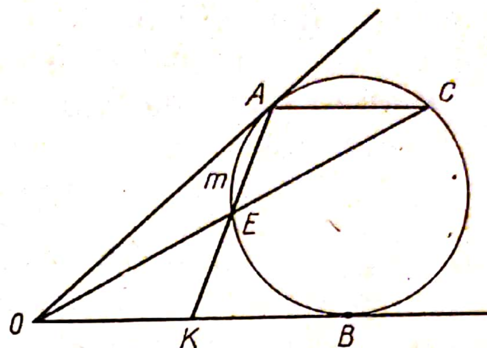


Fig. 142

329. Înlocuind în expresia dată valorile $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$, se obține $|c| \leqslant 1$ și $-1 \leqslant a + b + c \leqslant 1$, $-1 \leqslant a - b + c \leqslant 1$. Rezultă de aici că funcția afină $bx + a + c$ ia valori mai mici sau segmentul $[-1, 1]$, adică $|bx + a + c| \leqslant 1$, cînd $x \in [-1, 1]$. În concluzie, $|cx^2 + bx + a| = |c(x^2 - 1) + bx + a + c| \leqslant |c||x^2 - 1| + |bx + a + c| \leqslant 1 + 1 = 2$, $x \in [-1, 1]$, ceea ce trebuia demonstrat.

330. Se va arăta că cel mai mare calificativ pe care îl poate avea cîștigătorul este 20. Din enunț rezultă că după fiecare etapă calificativul celui mai puternic jucător rămas nu poate crește mai mult decît cu 2, ceea ce înseamnă că după cea de a zecea etapă calificativul celui mai tare nu poate depăși 21. Se va arăta că nu este posibilă mărirea calificativului celui mai tare nu se poate mări cu 2 după nici una din cele 10 etape. Se reduce la absurd. Înseamnă că după prima etapă au fost eliminați jucătorii cu numerele 1 și 2 (pierzînd față de cei cu calificativele 3, respectiv 4), după cea de a doua etapă, jucătorii cu calificativele 3 și 4 (pierzînd în fața celor cu calificativele 5 și 6) etc. În cea de-a zecea etapă au rămas jucătorii cu calificativele 19 și 20. Înseamnă că după ultima etapă calificativul celui mai puternic se mărește numai cu 1, ceea ce contrazice ipoteza. Invingătorul va fi numai un jucător cu calificativ care nu depășește 20.

Se dă în continuare un exemplu de joc, în care jucătorul cu calificativul 20 cîștigă efectiv. Exemplul se construiește prin inducție considerîndu-se cazul general, cînd sînt 2^n jucători, iar învingătorul este jucătorul cu numărul $2n$. Pentru $n = 1$ construcția este evi-

dentă. Dacă este indicat modul de construcţie al unui exemplu cu 2^{n-1} jucători, toţi cei 2^n jucători sînt împărţiţi în două grupe de 2^{n-1} jucători, învingătorii din fiecare grupă întîlnindu-se în cea de a n-a etapă, adică în finală.

În prima grupă intră jucătorii cu calificativele $2n$, $2n-1$ şi cei cu calificative mai mari. În a doua grupă intră jucătorii cu calificativele $1, 2, \ldots, 2n-2$ şi toţi ceilalţi jucători.

Se construieşte uşor un exemplu de joc în prima grupă, astfel încît cîştigătorul să aibă calificativul $2n$. În a doua grupă, conform ipotezei de la inducţie, cîştigătorul este jucătorul cu numărul $2n-2$. În finală se întîlnesc astfel jucătorii cu calificativele $2n$ şi $2n-2$, iar jucătorul cu calificativ $2n$ poate învinge.

331. Aria triunghiului nu poate depăşi jumătate din produsul a două laturi ale sale De aceia

$$1 \leqslant \frac{bc}{2} \leqslant \frac{b^2}{2},$$

deci $b \geqslant \sqrt{2}$.

332. Se consideră k drepte concurente în O, fiecare din acestea împărţind aria poligonului cu n laturi dat, în două părţi de arii egale. Se construieşte poligonul P; simetricul poligonului P faţă de punctul O. Este evident că respectivele drepte împart în două părţi egale şi aria poligonului P'. Aria celor două porţiuni ale poligonului P aflate în unghiurile opuse la vîrf formate de două drepte vecine, sînt egale (fig. 143). Prin simetria poligonului P faţă de punctul O aceste porţiuni se transformă una în alta. Se deduce uşor că în fiecare din cele $2k$ unghiuri în care cele k drepte împart planul, trebuie să se afle cel puţin un punct de intersecţie al contururilor poligoanelor P şi P', deoarece în caz contrar porţiunile poligoanelor P şi P' situate în unghiul respectiv nu ar putea avea ariile egale. Din această cauză contururile poligoanelor P şi P' se intersectează cel puţin în $2k$ puncte. Din convexitatea poligonului rezultă că pe fiecare din cele n laturi ale poligonului P se pot afla cel mult două puncte de intersecţie cu P'. De aceea $2k \leqslant 2n$, adică $k \leqslant n$.

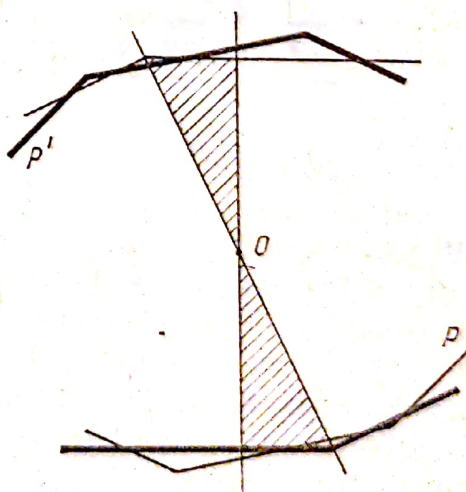


Fig. 143

333. Fiindcă ecuația $f(x) = x$ nu are rădăcini reale, înseamnă că trinomul de gradul al doilea $ax^2 + (b - 1)x + c$ nu se anulează în nici un punct și are același semn pentru orice valoare a lui x. Se consideră, în consecință, două cazuri: 1) $ax^2 + (b - 1)x + c > 0$, adică $f(x) > x$, 2) oricare ar fi x, $f(x) < x$.

Pentru primul caz se ia o valoare arbitrară $x = x_0$ și se scrie inegalitatea respectivă pentru cazul cînd $x = f(x_0)$ și $x = x_0$. Se obține astfel $f[f(x_0)] > f(x_0)$ și $f(x_0) > x_0$, deci $f[f(x_0)] > x_0$, ceea ce înseamnă că în primul caz ecuația $f[f(x)] = x$ nu are rădăcini reale. Analog se studiază al doilea caz.

334. Se demonstrează direct punctul b) deoarece punctul a) este o consecință a acestuia. Demonstrația se face prin inducție față de n. Pentru $n = 1$ afirmația este evidentă. Se presupune că este adevărată pentru orice $n < n_0$ și se arată că este adevărată și pentru $n = n_0$. Se consideră dreptunghiul P format din un număr întreg de carouri, conținînd toate cele n_0 carouri negre și astfel ca atît pe ultima coloană din stînga, cît și pe ultima linie de jos să se afle cel puțin un caro negru.

Dreptunghiul care se obține din P prin eliminarea ultimei coloane din stînga va fi notat cu P' (fig. 144). Este evident că acesta va conține mai puțin decît n carouri negre, și după presupunerea de la inducție aceste carouri, considerate izolat de carourile coloanei care a fost eliminată, dispar nu mai tîrziu de momentul $t = n_0 - 1$. Este totuși ușor de observat că prezența carourilor negre în coloana ultimă din stînga a dreptunghiului P nu influențează cu nimic procesul de recolorare al carourilor care se găsesc în dreptunghiul P', ci pot să atragă numai apariția de noi carouri negre în această coloană. Aplicînd deci regula dată totalității de n_0 carouri negre se găsește că la momentul $t = n_0 - 1$ dreptunghiul P' nu va mai conține nici un carou negru.

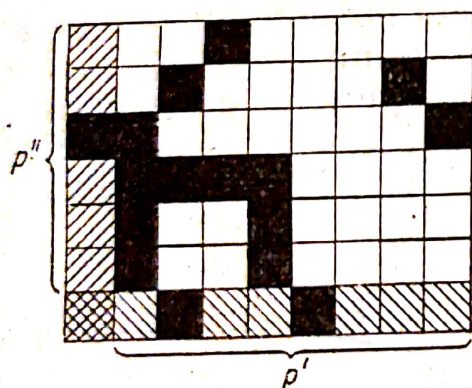


Fig. 144

Prin același procedeu se poate arăta că la momentul $t = n_0 - 1$ nu va mai fi conținut nici un carou negru în dreptunghiul P'' obținut din P prin eliminarea liniei ultime de jos. Deoarece este clar că în nici un moment nu se pot forma carouri negre în afara lui P, la momentul $t = n_0 - 1$ poate rămîne de culoare neagră numai caroul nesituat nici în P', nici în P'', adică acel carou din colțul din stînga jos al dreptunghiului P. Acesta va dispare la momentul $t = n$, deci în acel moment dispar toate carourile negre.

335. Se observă că la o permutare circulară a indicilor, atît membrul stîng, cît și membrul drept rămîn invarianți, deci dacă se face o nouă numerotare a numerelor x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 păstrînd ordinea de succesiune (se consideră că după x_5 urmează x_1). De aceea celui mai mare din cele cinci numere i se poate atribui orice indice. Este comod să se considere că x_2 este cel mai mare dintre aceste numere ($x_2 \geqslant x_i$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$). Trecînd ambii membri ai inegalității în stînga, se obține

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3 - 2x_3x_4 - 2x_4x_5 -$$
$$- 2x_5x_1 + 2x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2x_2x_4 + 2x_2x_5 + 2x_3x_5 =$$
$$= (x_1 - x_2 + x_3)^2 + (x_4 - x_5)^2 + 2x_4(x_1 + x_2 - x_3) +$$
$$+ 2x_5(x_2 + x_3 - x_1).$$

Avînd în vedere că $x_2 \geqslant x_3$ și $x_2 \geqslant x_1$ și că toate numerele x_i sînt, conform enunțului, pozitive, se vede că expresia obținută este nenegativă, inegalitatea fiind astfel demonstrată (De fapt s-a demonstrat strict o inegalitate.)

336. Se aleg trei din punctele date: A, B și C. Conform enunțului, cel de al patrulea punct D se află în afara planului ABC. Fie $\triangle ABC$. Este evident că există trei cazuri care se exclud reciproc și anume cînd dintre laturile triunghiului ABC sînt muchii ale paralelipipedului 1) două laturi, 2) o latură, 3) nici una nu este muchie. Se calculează numărul diferitelor paralelipipede în fiecare din aceste cazuri.

În primul caz se poate alege o pereche de muchii din cele trei laturi în trei moduri. Fiecare alegere a muchiilor determină unic fața paralelipipedului din planul ABC. Punctul D trebuie în acest caz să se afle pe fața paralelă și poate ocupa pe această față poziția dată de oricare din cele patru vîrfuri, determinînd astfel patru paralelipipede distincte. În primul caz se găsesc deci $3 \cdot 4 = 12$ paralelipipede distincte.

În al doilea caz oricare din cele trei laturi poate fi aleasă ca muchie. Se observă ușor că pentru fiecare alegere, una din celelalte două laturi trebuie să fie diagonală a unei fețe a paralelipipedului. În sfîrșit, punctul D poate ocupa oricare din cele două poziții pe muchia paralelă cu cea aleasă în planul ABC. Astfel, în al doilea caz se obțin $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ paralelipipede.

În sfîrșit, în cel de-al treilea caz nu se mai găsește în planul ABC nici un vîrf al paralelipipedului, punctul D putîndu-se afla în oricare din celelalte cinci vîrfuri, determinînd din fiecare dată un paralelipiped și numai unul singur.

Astfel, se găsesc în total $12+12+5=29$ paralelipipede distincte.

COMPLETARE

A DOUĂZECEA OLIMPIADĂ INTERNAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

1. Fie m şi n numere naturale şi $n > m \geqslant 1$. Ultimele trei cifre ale numărului 1978^m sînt respectiv egale cu ultimele trei cifre ale numărului 1978^n, atunci cînd aceste numere sînt scrise în baza 10.

Să se afle m şi n pentru care suma $m + n$ să fie minimă.

(Cuba)

2. Fie un punct dat P în interiorul unei sfere şi A, B, C trei puncte arbitrare pe sferă, astfel încît PA, PB, PC să fie perpendiculare două cîte două. În paralelipipedul dreptunghic determinat de PA, PB, PC fie Q punctul diagonal opus lui P. Se cere locul geometric al punctului Q cînd P rămîne fix iar A, B, C variază pe sferă.

(S.U.A.)

3. Mulţimea numerelor întregi, strict pozitive, este reuniunea a două mulţimi disjuncte

$$\{f(1),\ f(2),\ \ldots, f(n),\ \ldots\},\ \{g(1),\ g(2),\ \ldots, g(n),\ \ldots\}$$

satisfăcînd condiţiile

$$f(1) < f(2) < \ldots < f(n) < \ldots$$

$$g(1) < g(2) < \ldots < g(n) < \ldots$$

şi $g(n) = f[f(n)] + 1$ pentru orice $n \geqslant 1$.

Să se determine $f(240)$.

(Anglia)

4. În triunghiul ABC, laturile AV şi AC sînt egale. Un cerc tangent interior cercului circumscris triunghiului ABC este de asemenea tangent, respectiv în P şi Q, la laturile AB şi AC. Să se arate că mijlocul segmentului PQ este centrul cercului înscris în triunghiul ABC.

(S.U.A.)

5. Fie $\{a_k\}$, $k \in \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ un şir de numere întregi, strict pozitive, distincte două cîte două. Să se arate că, pentru orice număr întreg $n \geqslant 1$, are loc inegalitatea

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^2} \geqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}.$$

(Franţa)

6. Membrii unei societăţi internaţionale sînt din şase ţări diferite. Lista membrilor conţine 1978 nume, numerotate cu 1, 2, ..., 1978. Să se arate că există cel puţin un membru al acestei societăţi, al cărui număr de ordine este egal cu suma numerelor de ordine a doi membri compatrioţi ai săi sau egal cu dublul numărului de ordine al unuia din compatrioţii săi.

(Olanda)

REZOLVĂRILE PROBLEMELOR DATE LA A DOUĂZECEA OLIMPIADĂ INTERNAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

1. Numărul $1978^m(1978^{n-m} - 1)$ este multiplu de $1000 = 8 \cdot 125$. Primul factor este par iar cel de-al doilea factor este impar, prin urmare, numărul 1978^m este multiplu de 8 iar numărul $1978^{n-m} - 1$ este multiplu de 125. Din cauză că $1978 = 2 \cdot 989$ prima condiţie atrage după sine că $m \geqslant 3$, iar cea de-a doua condiţie implică $1978^{n-m} \equiv 1 \pmod 5$, adică $(-2)^{n-m} = 1 \pmod 5$. Faptul că $(-2)^2 = 4 \equiv -1 \pmod 5$ înseamnă că $n - m = 4k$, $k \geqslant 1$. Trebuie să fie determinată cea mai mică valoare a lui k pentru care 125 se divide la $1978^{4k} - 1$. Întrucît $1978^4 \equiv (-22)^2 = (-11 \cdot 2)^4 = (121 \cdot 4)^2 \equiv (-4 \cdot 4)^2 = 256 \equiv 6 \pmod{125}$, rezultă că $6^k \equiv 1 \pmod{125}$. Se deduce că $6^k = (1+5)^k \equiv 1 + 5k + \frac{k(k-1)}{2} \cdot 5^2 \pmod{125}$, iar condiţia se exprimă astfel: 125 se divide la $\frac{1}{2} \cdot 5k[2 + 5(k-1)]$. Numărul aflat în paranteza pătrată nu poate fi multiplu de 5, deci k este multiplu de 25 şi $n - m = 100$, $m = 3$, $n = 103$.

2. Fie O centrul sferei date, iar X punctul opus lui P situat pe faţa dreptunghiulară care conţine punctele P, A şi B. Conform

teoremei medianei $OP^2 + OQ^2 = OC^2 + OX^2$, iar $OP^2 + OX^2 = OA^2 + OB^2$, deci $2OP^2 + OQ^2 = OA^2 + OB^2 + OC^2$, ceea ce înseamnă că $OQ^2 = 3R^2 - 2OP^2 =$ const, R fiind raza sferei. Locul geometric este o sferă cu centrul O şi raza $\sqrt{3R^2 - 2OP^2} > M$.

Fie punctul Q astfel ca $OQ = \sqrt{3R^2 - 2OP^2}$. Sfera de diametru PQ intersectează sfera iniţială S $(OQ > R > OP)$; fie C unul din punctele comune acestora şi X punctul opus lui C în dreptunghiul $PCQX$. Se obţine $OP^2 + OQ^2 = OC^2 + OX^2$, adică $OX^2 = OP^2 + (3R^2 - 2OP^2) - R^2 = 2R^2 - OP^2 > R^2$, deci punctul X este situat în afara sferei S. Planul α trecînd prin punctul P şi perpendicular pe PC intersectează sfera S după cercul Γ, punctul P fiind interior acestui cerc, iar punctul X fiind situat în afara acestuia. Cercul de diametru PX situat în planul α intersectează pe Γ în B. Fie A punctul opus lui $B \in S$ în dreptunghiul $PBXA$. Se deduce că $OA^2 = OP^2 + OX^2 - OB^2 = OP^2 + 2R^2 - OP^2 - R^2 = R^2$, adică $A \in S$ ş.a.m.d.

3. Deoarece $g(n) = f[f(n)]+1$ iar $f[f(n)]$ aparţine primei mulţimi, înseamnă că există exact $n - 1$ elemente din mulţimea a doua mai mici decît $f[f(n)]$, ceea ce arată că $f[f(n)] = f(n) + n - 1$. Fiindcă 1 nu aparţine celei de-a doua mulţimi, $f(1) = 1$. Primul element al celei de-a doua mulţimi este $f[f(1)] + 1 = 2$. Două numere întregi consecutive nu pot aparţine la ce a de-a doua mulţime. Se deduce că $f(2) = 3$. Folosirea repetată a formulei stabilite conduce la $f(3) = 3 + 1 = 4$, $f(4) = 4 + 2 = 6$, $f(6) = 6 + 3 = 9$, $f(9) = 9 + 5 = 14$, $f(14) = 22$, $f(22) = 35$, $f(35) = 56$, $f(56) = 90$, $f(90) = 145$, $f(145) = 234$, $f(234) = 378$.

Întrucît $f[f(35)] + 1 = 91$ aparţine la cea de-a doua mulţime, $f(57) = 92$. Conform formulei precedente, $f(92) = 148$, $f(148) = 239$, $f(239) = 386$. Din cauză că $f[f(148)] + 1 = 387$ aparţine celei de-a doua mulţimi, înseamnă că $f(240) = 388$.

4. Dacă se notează cu O centrul primului cerc considerat şi cu T punctul de tangenţă al acestui cerc cu cercul circumscris triunghiului ABC, se constată că figura este simetrică faţă de o axă care trece prin punctele A, O, T şi mijlocul M al segmentului BC, axă perpendiculară pe segmentul BC.

Omotetia de centru A care transformă punctul T în M va transforma cercul de centru O în cercul înscris în triunghiul ABC, deci punctul O va fi transformat în centrul acestui cerc. Centrul O fiind situat pe axa de simetrie a figurii, înseamnă că $\sphericalangle ABT = \sphericalangle ACT = 90°$, patrulaterele $ABTC$ şi $APOQ$ sînt asemenea, deci omotetia considerată transformă punctul O în mijlocul segmentului PQ, ceea ce trebuia demonstrat.

5. Fie $\{a_k\}$ şirul pentru care se realizează minimul părţii stîngi a inegalităţii, în ipoteza că n şi $a_1, \ldots, a_n$ sînt fixate. Dacă $a_a > a_b$ pentru $1 \leqslant a < b \leqslant n$ oarecare, considerînd şirul $\{\alpha_k\}$ definit astfel :

$$\alpha_k = \begin{cases} a_k, & k \neq a,\ k \neq b, \\ a_b, & k = a, \\ a_a, & k = b, \end{cases}$$

se obţine

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{k^2} = \frac{a_a}{a^2} + \frac{a_b}{b^2} - \frac{a_a}{b^2} - \frac{a_b}{a^2} = (a_a - a_b)\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right) > 0,$$

în contradicţie cu definiţia şirului $\{a_k\}$. Aceasta arată că $a_1 < a_2 < \ldots$ $\ldots < a_n$, deci $a_k \geqslant k$, $\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^2} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

6. Celor şase ţări le corespind şase submulţimi ale mulţimii $\{1, 2, \ldots, 1978\}$ care realizează o partiţie a acestei mulţimi. Una din aceste submulţimi, fie A, va conţine nu mai puţin de $\frac{1978}{6} = 329 + \frac{2}{3}$ elemente, adică 330 elemente : $a_1 < a_2 < \ldots < a_{330}$. Cele 329 diferenţe $a_{330} - a_k$ $(k = 1, 2, \ldots, 329)$ nu aparţin lui A (în caz contrar problema este rezolvată). Printre acestea se găsesc nu mai puţin de $\frac{329}{5} = 65 + \frac{4}{5}$ elemente, adică 66 elemente care aparţin uneia şi aceleiaşi mulţimi, fie B. Dacă aceste diferenţe sînt

$$a_{330} - a_{k_1} < a_{330} - a_{k_2} < \ldots < a_{330} - a_{k_{66}} < \ldots,$$

atunci $a_{k_j} - a_{k_{66}} = (a_{330} - a_{k_{66}}) - (a_{330} - a_{k_j})$ $(j = 1, 2, \ldots, 65)$ nu aparţin nici mulţimii A, nici mulţimii B. Printre acestea se găsesc 17 în una şi aceeaşi mulţime, fie C, apoi 16 astfel de diferenţe, ca mai sus, nu se găsesc nici în mulţimea A, nici în mulţimea B şi nici în mulţimea C. Şase din acestea vor fi într-o mulţime D, cinci din diferitețele ultimelor nu vor aparţine la nici una din mulţimile A, B, C, D. Trei din acestea se află în una şi aceeaşi mulţime E, cele două noi diferenţe în mulţimea rămasă F, iar diferenţa lor nu se găseşte în nici una din mulţimile A, B, C, D, E, F. Contradicţia obţinută arată că presupunerea făcută este falsă.

CUPRINS

Redactor: Valentina Creţu
Tehnoredactor: Elena Geru
Coperta: arh. Valentin Vişan

Bun de tipar: 16.10.78; Coli de tipar: 23,50
Tiraj: 50.000+60 exemplare broşate; C.Z. 51(079.1)



c. 1664 I. P. Informaţia

Str. Brezoianu nr. 23—25 Bucureşti